Problème d'optimisation

TraAM - Problèmes ouverts, Apport des outils numériques

Cette activité fait partie d'un ensemble de ressources produites dans l'académie de Toulouse dans le cadre des TRAAMS 2013-2014 sur le thème : Problèmes ouverts, les apports des outils numériques ».
La synthèse de la réflexion menée à Toulouse est disponible sur le site académique.
Il ressort que pour que des élèves soient capables de s'engager dans la résolution d'un problème ouvert, il est nécessaire que l'enseignant ait développé chez lui des cultures,

- Culture de ce type de questionnement : le premier problème ouvert est toujours un peu difficile pour beaucoup d'élèves ; une habitude de questions plus ouvertes pour lesquelles ils auront dû prendre des initiatives permet d'aplanir cette difficulté. Nous proposons donc quelques activités proposant ce type de questionnement.
- Culture de la modélisation : apprendre à se poser les questions.
- Culture de la démarche algorithmique pour résoudre des problèmes.
- Culture aussi de l'utilisation d'outils numériques pour résoudre des problèmes.

Expérimentation en classe de 3e

I. Les activités satellites

-Des activités en salle informatique (2 élèves par poste) ont été réalisées en amont.

- Utilisation d'un tableur
- Utilisation du logiciel Geogebra

Leur objectif était double : manipuler et montrer la pertinence de l'outil.

II. Organisation matérielle et description de l'activité

J'ai recherché dans le collège un espace qui comportait à la fois des postes informatiques et des bureaux.
La seule salle ayant cette configuration est le CDI. Il était disponible le vendredi en dernière heure de la journée.

III. La séance

1. Énoncé donné aux élèves- 1 séance d'une heure

ATELIER recherche 3ème

1ère partie : Construction sur papier :

- Construis un carré ABCD de côté 10 cm.
- Choisis un nombre compris entre 1 et 10 et place le point E sur le segment [DC] tel que la longueur DE soit égale à ce nombre.
- Construis le point F du segment [BC] tel que : DE = FC.
- Trace le quadrilatère AECF.
- Calcule l'aire du quadrilatère AECF que tu as construit.

2ème Partie : Conjecture

On se demande si l'aire du quadrilatère dépend de la position de E sur le segment [DC].

Pour ta recherche, tu peux utiliser :

- **soit une calculatrice**
- **soit un tableur,**
- **soit geogebra**

3ème Partie : démonstration

2. Bilan :

- 10 groupes (groupes de 2 ou 3 élèves et 1 groupe de 4 élèves)
- 1 groupe a pour conjecture « L'aire dépend de la position de E »
- Pour les 9 autres groupes :
  - 2 groupes ont fait une démonstration (partie III) sans outil informatique
  - 1 groupe tableur (pour II)
  - 1 groupe geogebra- figure complète (pour II ou III ?)
  - 1 groupe volonté d'utiliser geogebra (mais pb de temps)
  - 4 sans outil et pas de démonstration

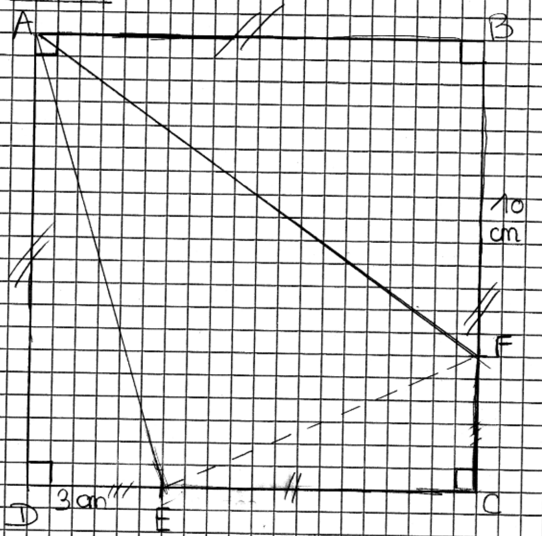
Pertinence de l'outil :

- Pour infirmer une conjecture fausse
- Pour confirmer la conjecture (ceux qui avaient seulement deux valeurs)
- L'outil informatique n'est pas vraiment une aide pour comprendre pourquoi ça ne varie pas (démonstration ?)

Productions d’élèves

Maths : Atelier Recherche   Romane Lacroix

1e partie :



• ~~A_{ABCD}~~ $A_{ACFE} = A_{ABCD} - (A_{BFG} + A_{AED})$

$A_{ABCD} = AB \times BC = 10 \times 10 = 100\ cm^2$

$A_{ABF} = BA \times BF : 2 = 10 \times 7 : 2 = 70 : 2 = 35\ cm^2$

$A_{AED} = AD \times DE : 2 = 10 \times 3 : 2 = 30 : 2 = 15\ cm^2$

$A_{AFCE} = A_{ABCD} - (A_{BFA} + A_{AED}) = 100 - (35 + 15) = 100 - 50 = 50\ cm^2$

2e partie

Remarque

On V L'aire dépend de ~~E~~ la position de E sur le segment [DC] mais aussi de F sur le segment [BC]

3e

Conjecture fausse

$$\mathcal{A}_{ABF} = \frac{AB \times BF}{2} = \frac{10 \times 6}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

L'aire du triangle ABF est 30 cm²

$$\mathcal{A}_{ADE} = \frac{AD \times DE}{2} = \frac{10 \times 4}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

L'aire du triangle ADE est 20 cm²

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{AECF} &= \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{ADE} + \mathcal{A}_{ABF}) \\ &= 100 - (30 + 20) \\ &= 100 - 50 \\ &= 50 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

L'aire de AECF est de 50 cm².

II) Conjecture

Je pense que l'aire du quadrilatère ne dépend pas de la position E sur le segment [DC].

III) Recherche

Ma partenaire a réalisé la même démarche pour calculer l'aire que moi au numéro I), en observant les résultats obtenus nous nous sommes aperçus que même si le nombre (entre 0 et 10) que nous avons choisis n'était pas le même l'aire était la même.

$\mathcal{A}_{AECF} = 50 \text{ cm}^2$

2e partie

Après la mise en co[...] malgré que nos ch[...] soient différents, l'a[...]

Conjecture à partir de deux valeurs.
Passage à la démonstration littérale à partir de là.
(2 très bonnes élèves)

Nous pensons donc que l'aire ne dépend pas de la position de E sur [DE]

~~Nous utilisons GeoGebra sur lequel nous construisons le carré ABCD précédent. On va ensuite déplacer le point E et observer l'aire, si elle change ou non.~~

Idée : écrire la fonction qui, à ~~un nombre~~ la longueur de [DE], fait correspondre l'aire de AECF pour démontrer que quelque soit la valeur de x ; $f(x) = 50$

Problème de temps + difficulté à écrire l'expression algébrique de *f(x)*

$\mathcal{A}_{ABCD} = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$

$BF = BC - FC = 10 - 4 = 6 \text{ cm}$

$\mathcal{A}_{ABF} = \frac{AB \times BF}{2} = \frac{10 \times 6}{2} = 30 \text{ cm}^2$

$\mathcal{A}_{AED} = \frac{AD \times DE}{2} = \frac{10 \times 4}{2} = 20 \text{ cm}^2$

$\mathcal{A}_{AECF} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{ABF} + \mathcal{A}_{ADE}) = 100 \text{ cm}^2 - (30 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2) = 50 \text{ cm}$

Donc le quadrilatère AECF a une aire de 50 cm²

II ème partie

Avec 7 comme nombre de départ, (comme a fait Victor), on trouve le même résultat. Donc on peut conjecturer :

"Je pense que l'aire du quadrilatère ne dépend pas de la position de E."

III ème partie

On a fait une figure sur Geogebra et on a vu que pour n'importe quelle position de E, l'aire de AECF ne change pas.

$\mathcal{A}_{ABF} = \frac{b \times h}{2} = \frac{AB \times (CB - CF)}{2} = \frac{10 \times (10-2)}{2} = \frac{10 \times 8}{2} = \frac{80}{2} = 4$

Donc $\mathcal{A}_{AECF} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{AED} + \mathcal{A}_{ABF})$

$= 10 \times 10 \text{ cm}^2 - (10 \text{ cm}^2 + 40 \text{ cm}^2)$

$= 100 - 50 = 50 \text{ cm}^2$

Donc le quadrilatère AECF à une aire de 50 cm².

2) On pense que l'aire du quadrilatère sera toujours la même car la somme de l'aire des deux triangles est toujours la même

2ème partie : Conjecture

Après la mise en commun de nos résultats, nous avons constaté que l'aire du quadrilatère ne dépend pas de la position du point E car nous avions choisi des nombres entre 0 et 10 différent et que nous avons obtenu la même aire du quadrilatère AECF.

~~Nous supposons donc~~

3ème partie : Démonstration

Nous utilisons GeoGebra sur lequel nous reproduisons la construction précédente en changeant l'emplacement du point E sur le segment [DC].

Idée : écrire la fonction qui, à la longueur DE, fait correspondre l'aire du quadrilatère AECF

$f(x) = 100 - \ldots ?$

$f(x) = 50$

: Démontrer de cette façon que quelle que soit la valeur de x, $f(x) = 50$

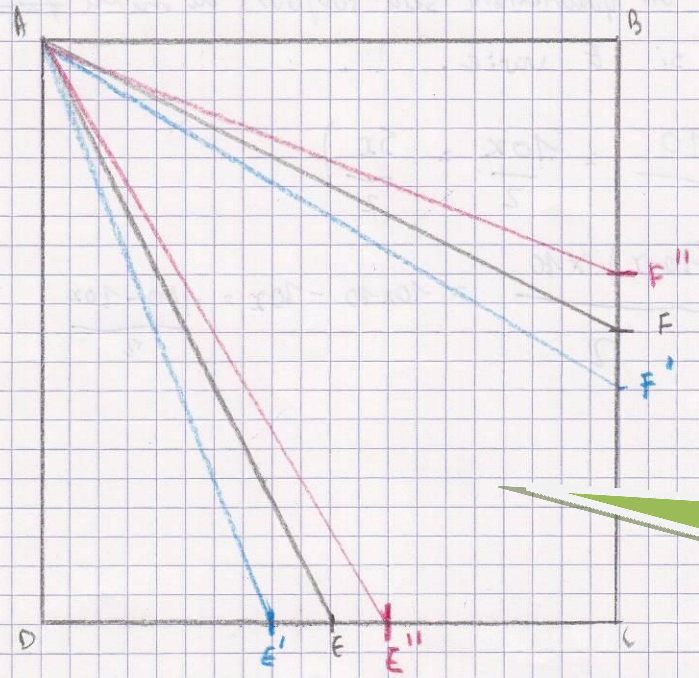
2ème Partie : Conjecture

① différentes

Après la mise en commun de nos résultats, nous pouvons constater que l'aire de AECF est égale malgré le fait que nous n'ayons pas choisi le même nombre entre 0 et 10 et donc des longueurs① pour le segment [DC] ; nous conjecturons donc que l'aire de AECF ne dépend pas de la position de E sur le segment [DC].

Idée : . écrire la fonction f qui à ~~un point~~ la longueur DE fait correspondre l'aire de AECF.

. démontrer de cette façon que ~~qut~~ quelque soit la valeur de x ; $f(x) = 50$



Idée de ce groupe : Plusieurs points sur une même figure

1ème PARTIE ;

Calcul de l'aire de AECF :

on calcul l'aire de ABCD : $C \times C = 10 \times 10 = 100$ cm²

ABCD a une aire de 100 cm².

on calcul l'aire des triangles ABF et ADF :

$$\frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Pour ADE : $\frac{DE \times AD}{2} = \frac{5 \times 10}{2} = \frac{50}{2} = 25$ ADE à une aire de 25 cm².

Pour ABF : $\frac{BF \times AB}{2} = \frac{5 \times 10}{2} = \frac{50}{2} = 25$ ABF à une aire de 25 cm²

On enlève l'aire des triangles au carré pour trouver celle du quadrilatère : $100 - 25 - 25 = 50$

AECF à une aire de 50 cm².