Géométrie et maximum

TraAM - Problèmes ouverts, Apport des outils numériques

Cette activité fait partie d'un ensemble de ressources produites dans l'académie de Toulouse dans le cadre des TRAAMS 2013-2014 sur le thème : Problèmes ouverts, les apports des outils numériques ».
La synthèse de la réflexion menée à Toulouse est disponible sur le site académique.
Il ressort que pour que des élèves soient capables de s'engager dans la résolution d'un problème ouvert, il est nécessaire que l'enseignant ait développé chez lui des cultures,

- **Culture de ce type de questionnement : le premier problème ouvert est toujours un peu difficile pour beaucoup d'élèves ; une habitude de questions plus ouvertes pour lesquelles ils auront dû prendre des initiatives permet d'aplanir cette difficulté. Nous proposons donc quelques activités proposant ce type de questionnement.**
- **Culture de la modélisation : apprendre à se poser les questions.**
- **Culture de la démarche algorithmique pour résoudre des problèmes.**
- **Culture aussi de l'utilisation d'outils numériques pour résoudre des problèmes.**

Fiche professeur

Ces activités ont été proposées en première S dans une salle équipée d'ordinateurs
Activité proposée comme une épreuve pratique testée en 2008
Durée : 1h30

Enoncé

On considère un carré ABCD de côté 1 et le cercle (C) de centre D et de rayon 1.
A tout point M du segment [AB], on associe le point N du segment [BC] tel que la droite (MN) soit tangente au cercle (C).
Préciser la position de M pour laquelle la distance MN est minimale et la position de M pour laquelle l'aire de MBN est maximale.

---

1. Créer une figure dynamique permettant d'observer le lieu du point *N*. (On note T le point de contact de (MN) avec (C))
2. Déterminer expérimentalement la position de M qui répond au problème

Appeler le professeur pour vérifier la construction.

3. Etude analytique : Pour cela, on pose $AM = x$; $MN = f(x)$ et $g(x)$ l'aire de MBN
Répondre au problème

Appeler le professeur, lui montrer la démonstration de la conjecture

---

OU

a) Se placer dans le repère $(D; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DA})$. Prouver que $CN = \frac{1-x}{1+x}$. Prouver que $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ puis étudier les variations de f En déduire la position de M pour laquelle MN est minimale.

b) Justifier que $g(x) = \frac{x(1-x)}{x+1}$ puis prouver que g est maximale lorsque f est minimale.

Donner la valeur du maximum de *l'aire de MBN* Conclure.

Appeler le professeur, lui montrer la démonstration de la conjecture

----

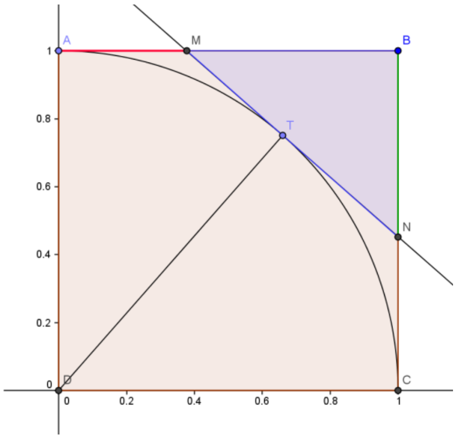
OU

a) Admettre que $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ puis étudier les variations de f En déduire la position de M pour laquelle MN est minimale.

b) Admettre que $g(x) = \dfrac{x(1-x)}{x+1}$ puis prouver que g est maximale lorsque f est minimale.

Donner la valeur du maximum de *l'aire de MBN* Conclure.

Appeler le professeur, lui montrer la démonstration de la conjecture



La figure est difficile car on doit commencer par placer T, mais le logiciel permet de s'approprier le problème et de conjecturer.

Complément :

1) interprétation géométrique de la position trouvée de M qui rend MN minimal (c'est à dire lorsque D,T et B sont alignés ou encore M et N symétriques par rapport à (DB))...
   Le but est que des élèves mettent cet argument de symétrie en avant. Le logiciel peut les mettre sur la piste.

2) calculer f(x) + g(x) (égal à 1) et faire expliquer ce résultat en terme d'aire (par exemple l'aire du polygone AMNCD est d'une part le double de l'aire de MND soit MN x DT = MN x 1 et d'autre part l'aire du carré moins l'aire du triangle MBN d'où f(x) = 1 - g(x)).

Activité à proposer en aval

TD différencié (les élèves se voient proposée une version choisie par le professeur)

Dans un repère orthonormal, A est le point de coordonnées (1 ;1). A tout nombre réel $x > 1$, on associe le point M de coordonnées (x ;0) et on note N le point en lequel la droite (AM) coupe l'axe des ordonnées.

Version 1 :

Quelle est la position du point M telle que l'aire du triangle OMN soit minimale ?

Version 2 :

Calculer, en fonction de x, l'ordonnée du point N.

En déduire l'aire du triangle OMN, en fonction de x.

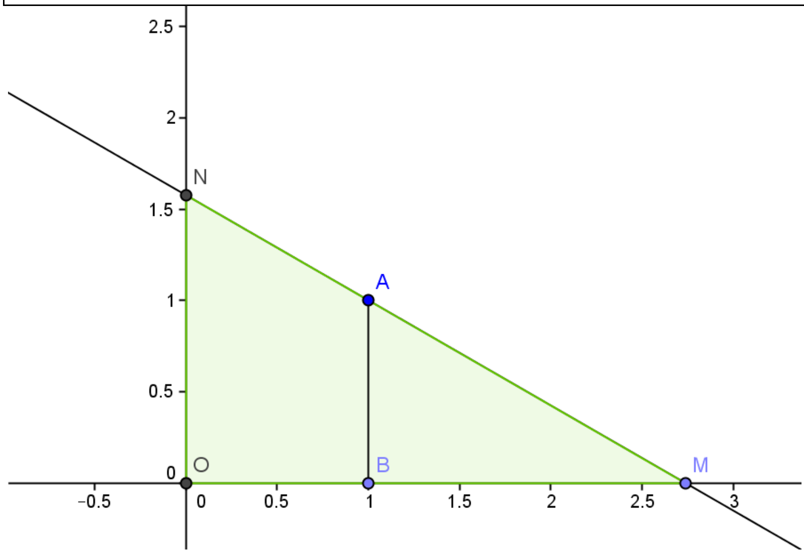
Quelle est la position du point M telle que l'aire du triangle OMN soit minimale ?

Version 3 :

(i) Calculer, en fonction de x, l'ordonnée du point N.

(ii) En déduire l'aire du triangle OMN, en fonction de x.

(iii) f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$. Calculer f'(x) et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f. Quelle est la position du point M telle que l'aire du triangle OMN soit minimale ?



Le logiciel permet de faire des conjectures et « peut-être » de reconnaitre une configuration de « Thalès »

La dérivée est connue depuis peu.