Activités autour des problèmes du type $f(x) = 0$

Histoires d'optimisation...

Pour l'ensemble des activités, on suppose avoir traité les points suivants du programme :

- Continuité
- TVI
- Limite de fonction
- Suites

Activité en amont : Etude de fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire.

Compétences calculatoires travaillées :

- Dérivée d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle
- Etude de signe

Outils : calcul manuel

Exemple :

1. Soit $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ sur $[-3; 3]$.
   (a) Dresser le tableau de variations de g sur $[-3; 3]$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et en donner une valeur approchée à 0,1 près. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[-3; 3]$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$ sur $[-3; -1] \cup] - 1; 3]$.
   (a) Démontrer que pour $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$
   (b) A l'aide de la question 1)c), déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f sur $[-3; -1[\cup] - 1; 3]$.

Activité Principale : Une histoire d'optimisation ...

Objectif :

- Dérivée d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle
- Etude de signe délicate - Utilisation en autonomie d'un logiciel de calcul formel
- Mise en oeuvre d'une stratégie calculatoire pour démontrer l'orthogonalité de deux droites.

Outils : XCAS, Geogebra

Enoncé :

Dans un repère orthonormé, on considère la branche d'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$.

A est le point de coordonnées $(1; -1)$ et $M(x; \dfrac{1}{x})$ un point quelconque de la branche d'hyperbole, avec $x > 0$.

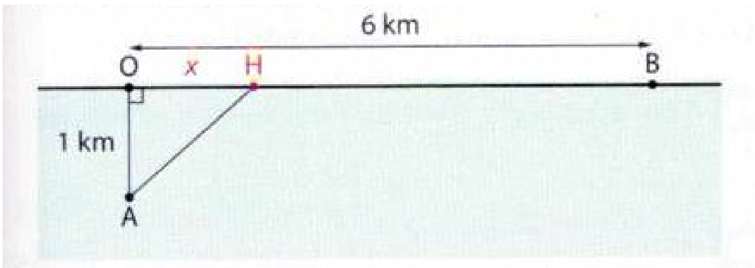
1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la position du point M pour laquelle la distance AM est minimale.
2. Pour $x > 0$, on définit la fonction d qui à x associe la distance AM^2.
   Démontrer que pour $x > 0$, $d'(x) = \dfrac{2f(x)}{x^3}$ où f est un polynôme de degré 4.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. A l'aide des questions précédentes, démontrer la conjecture émise à la question 1).
5. Démontrer que si M est le point le plus proche de A alors (AM) est perpendiculaire à la tangente en M à l'hyperbole.

Commentaires :

- Un logiciel de calcul formel peut-être utilisé pour vérifier l'expression de f dans la question 2.
- Dans la question 3, f' est une fonction polynôme de degré 3. Une factorisation s'impose pour l'étude du signe. Un logiciel de calcul formel permet de "débloquer" la situation.
- On a laissé ouvert la question 4 pour réinvestir le travail réalisé dans l'activité préparatoire.
- Cette dernière question est très riche ... Plusieurs stratégies sont possibles : Produit scalaire, équation de droite, théorème de Pythagore.

Activité en aval :
Compétences calculatoires travaillées :

- Dégager la dérivée d'une expression du type $\sqrt{u}$
- Etude de signe délicate - Utilisation éventuelle du calcul formel



Déterminer l'endroit de la côte où le canot doit accoster pour rendre minimal le trajet $A - H - B$, sachant que le trajet $[AH]$ en mer est parcouru à une vitesse de 4 km.h^{-1} et le trajet $[HB]$ sur la terre, est parcouru à une vitesse de 5 km.h^{-1}