

Exemples d'activités sur le thème : **Résoudre des problèmes du type  $f(x) = k$**  permettant une acquisition progressive des compétences de calcul :

Cet ensemble d'activités s'inscrit dans une [progression](#) globale visant l'acquisition des compétences de calcul intervenant sans l'étude des fonctions.

Les activités proposées sont relatives au thème "Résoudre des problèmes du type  $f(x) = k$ " étudié en classe de seconde. Elles ont pour but de développer **progressivement** les compétences suivantes en termes de calcul manuel et instrumenté :

- Identification et choix d'une forme adaptée pour résoudre un problème du type  $f(x) = k$ .
- Transformation d'écriture pour obtenir une forme adaptée.

A travers ces activités, on veut mettre en évidence les interactions entre calcul manuel et calcul instrumenté. Le calcul instrumenté ne se substitue pas au calcul manuel. Il permet

- De développer l'autonomie des élèves qui choisissent la forme adaptée,
- De mettre en place des automatismes dans les méthodes de calcul : par exemple factoriser pour résoudre une équation et ce même lorsque la factorisation n'est ni évidente, ni donnée.

L'utilisation du calcul formel n'est pas systématique ; On donne aux élèves un éventail de méthodes.

Les compétences travaillées (en termes de calcul) sont **surlignées**.

Les commentaires concernant la manière dont les activités ont été mises en œuvre et les réactions des élèves sont *en italique*.

Les éléments de la fiche professeur sont *en rouge et en italique*.

Partie du programme	Résoudre par le calcul des problèmes du type $f(x) = k$	
<b>Contexte...</b>	Le vocabulaire sur les fonctions et la résolution graphique d'équations ont déjà été travaillés. Des exercices techniques de développement et factorisation ont été traités.	
<b>Compétences Prérequis</b>	<u>CM</u> : Développer, factorisations simples. Equation du 1 <sup>er</sup> degré. .	
<b>Compétences à acquérir</b>	<u>CM</u> : Identification et choix de la forme. Résolution d'équations produit. <u>CI</u> : Obtenir une forme adaptée.	
<b>Calcul manuel Intelligence du calcul</b>	Choix de la forme	Résolution
<b>Interactions</b>	↑	↓
<b>Calcul instrumenté</b>	produit différentes formes	Vérification

*Plus tôt dans l'année, travail technique sur développement/factorisation et équations produit.*

**Type d'exercices :**

Développer  $(2x + 3)(4x - 3)$ , ...

Factoriser  $(x-1)(2x + 3) - (2x + 3)(2-x)$ ,  $(x-7)^2 - 25$ , ...

Résoudre  $(x+3) = (x+3)(5x-4)$ ,  $(x - 1)^2 + x = 1$ , ...

*A l'issue de ce travail, les élèves ont une maîtrise correcte de ce type de factorisations et de développements « classiques » par contre les calculs plus complexes (développement de 3 facteurs, factorisations en deux temps, ...) ne sont pas maîtrisés.*

## Activités proposées :

### I/ Premier temps : Découvrir différentes formes et leur « intérêt » respectif.

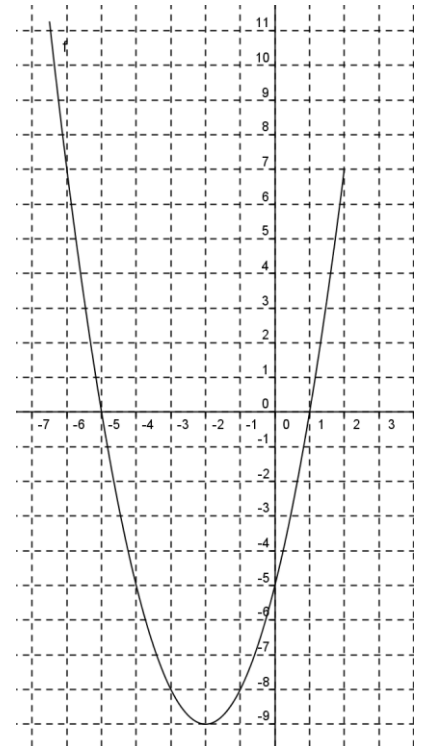
#### Fiche professeur :

Les fonctions ont déjà été travaillées en classe de 2<sup>nde</sup> (aspect graphique, calcul d'image, calculs simples d'antécédents ; pour plus de précisions, se reporter à la progression sur le thème des fonctions)

Des exercices divers (résolution de problèmes concrets, exercices plus techniques...) ont été traités à ce propos.

Ce premier exercice permet de balayer et de réactiver ces notions.

La fonction étudiée est une fonction du second degré mais l'étude propre à ces fonctions n'a pas été faite.



### Activité : Comprendre l'intérêt des différentes formes.

Voici dans un repère orthonormé (O,I,J), la représentation graphique d'une fonction f définie sur  $[-6,5 ; 2]$ .

#### Etude graphique (rappels) :

- 1) Lire sur le graphique l'image de  $-2$ .
- 2) Lire sur le graphique le ou les antécédents de  $0$ .
- 3) Lire sur le graphique le ou les antécédents de  $-8$ .
- 4) Lire sur le graphique l'image de  $0$ .
- 5) Résoudre graphiquement  $f(x) = -5$ .
- 6) Donner le tableau de variations de f.
- 7) Quel est le minimum de f ?

#### Etude algébrique :

L'expression algébrique de f est  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ .

- 8) Utiliser votre calculatrice pour obtenir un tableau de valeurs de f avec un pas de 0,5. Que remarque-t-on ?
- 9) Voici quatre formes algébriques :

$$f_1(x) = 2x^2 + 1 - (x-2)(x-3).$$

$$f_2(x) = (x-1)(x+5)$$

$$f_3(x) = (x+2)^2 - 9$$

$$f_4(x) = (x-2)^2 - 7$$

- a) Calculer  $f_1(0)$  et  $f(0)$ . Que peut-on en déduire ?
- b) Calculer  $f_4(0)$  et  $f(0)$ . Que peut-on en déduire ?

On incite les élèves à faire ces calculs **mentalement**.

- c) Certaines sont égales à f. Lesquelles ?
- d) Utiliser la forme la plus appropriée pour répondre **par le calcul** aux questions 1 à 5, et 7 de la partie « Etude graphique ».

**Compétences de calcul travaillées :** Réinvestissement des activités de développement et factorisation dans le contexte de l'étude des fonctions.

#### Découverte d'une « nouvelle » forme

La question 6) relative au sens de variation ne pourra être résolue algébriquement que plus tard dans l'année (selon le niveau de la classe).

Exercices du même type. (...)

## II/ Deuxième temps :

Activité : 1<sup>ère</sup> utilisation du logiciel de calcul formel pour obtenir la forme la plus appropriée.

*Fiche professeur :*

*Cet exercice propose la résolution d'un problème.*

*L'objectif est de :*

- Faire réfléchir les élèves sur la méthode et en particulier la forme à utiliser pour résoudre des équations.*
- De faire découvrir le logiciel de calcul formel.*

*Les deux premières questions peuvent être modifiées pour être plus ouvertes.*

*Par exemple 1) Traduire l'énoncé.*

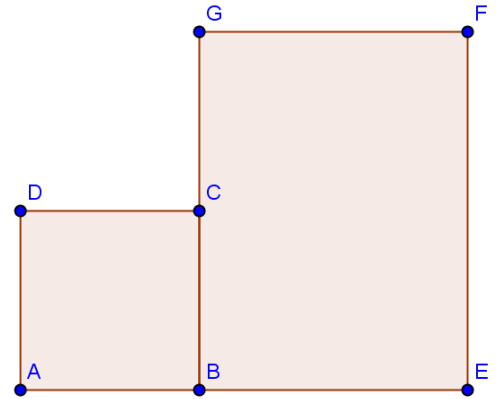
*2) a), b) et c) étant données, se contenter de « Que faire pour résoudre ces équations ? »*

Un polygone est constitué d'un carré et d'un rectangle comme sur la figure ci-contre.

ABCD est un carré de côté  $x$  (en m) ; BEFG est un rectangle avec

$BE = x+1$  et  $EF = x+2$ .

- Donner l'aire  $f(x)$  du polygone AEFGCD.
- On souhaite répondre aux questions suivantes (**ne pas répondre pour le moment**) :
  - Est-il possible que l'aire du polygone soit celle d'un rectangle de côté  $2x$  et  $x+2$  ?
  - Est-il possible que l'aire du polygone étudié soit supérieure de  $1\text{m}^2$  à celle d'un rectangle de côtés  $x+1$  et  $x+4$  ?
  - Est-il possible que l'aire du polygone soit de  $254\text{m}^2$  ?



Pour chacune des questions a), b) et c) :

- quelle équation il faut-il résoudre ?
  - quelle est la forme algébrique la mieux adaptée pour le faire ?
  - pouvez-vous la déterminer ?
- 3) Logiciel de calcul formel.

Ouvrir le logiciel xCas ;

Dans la barre de saisie, taper : `1|resoudre(2*x^2+3*x+2-2*x*(x+2),x)` . Quel est le résultat affiché ?

S'agit-il

- d'une vérification d'un résultat déjà obtenu ?
- d'une information nouvelle qu'on n'avait pas pu obtenir ?

Dans la barre de saisie, taper : `2|factoriser(2*x^2+3*x+2-(1+(x+1)*(x+4)))` . Quel est le résultat affiché ?

S'agit-il

- d'une vérification d'un résultat déjà obtenu ?
- d'une information nouvelle qu'on n'avait pas pu obtenir ?

Qu'aurait-on pu taper pour répondre aussi ?

Utiliser xCas pour terminer de répondre à la question c). Vous proposerez deux méthodes possibles.

**Compétences de calcul travaillées : Travail sur « l'intelligence du calcul » : prévoir la forme adaptée.**

**Découverte dans ce contexte du calcul formel.**

Les élèves découvrent la fonction RESOUDRE. On doit alors leur faire remarquer

- que l'on ne maîtrise en rien la méthode utilisée par le logiciel.
- que cette fonction devra être utilisée « avec modération » et qu'elle ne peut remplacer les méthodes où l'on maîtrise la démarche.

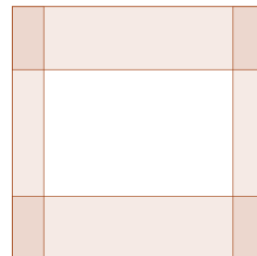
C'est l'occasion pour le professeur d'explicitier le statut des différentes réponses apportées par le logiciel (celles que l'on peut contrôler comme FACTORISER / celles que l'on « subit »).

Le professeur doit indiquer clairement lorsque les élèves sont laissés en autonomie s'il accepte l'utilisation de RESOUDRE.

## Autres exercices du même type, éventuellement sans ordinateur :

(...)

On désire imprimer une carte carrée de côté  $x$  avec  $x$  inférieur à 10 cm. On souhaite cependant laisser une marge de 1cm en haut et en bas de la carte; et de 0,5cm à gauche et à droite (voir dessin ci-contre).



On appelle  $f(x)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la surface **imprimable**.

- 1) Expliquer pourquoi  $x$  doit être supérieur ou égal à 2cm.
- 2) Montrer que  $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ .
- 3) Développer  $f(x)$ .
- 4) On souhaite obtenir une zone imprimable de  $2 \text{ cm}^2$ . Déterminer la dimension  $x$  à donner à cette carte.
- 5) On souhaite obtenir une carte dont la surface est  $12 \text{ cm}^2$ .

Pierre pense que pour déterminer  $x$ , il faut factoriser l'expression  $f(x) - 12$  en utilisant xCas ;

Paul pense qu'il faut développer l'expression  $f(x) - 12$  ; il utilise xCas.

Jacques pense qu'il est inutile d'utiliser un logiciel de calcul formel puisqu'on connaît déjà l'expression factorisée de  $f(x)$ .

Qui a raison ? Déterminez la valeur de  $x$  pour laquelle la surface imprimable est  $12 \text{ cm}^2$ .

1	factoriser((x-1)*(x-2)-12)	
		(x-5)*(x+2)
2	developper((x-1)*(x-2)-12)	
		$x^2 - 3 \cdot x - 10$

*Compétences de calcul travaillées : Développer, résoudre une équation du second degré simple à la main, résoudre une équation du second degré après factorisation ; Intelligence du calcul.*

## Activités pour lesquelles on trouve l'expression factorisée de $f$ sans recours au calcul formel. Le calcul formel devient outil de vérification.

La fonction  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 7x^2 + 10x - 8$ .

- 1) Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$ . Conjecturer le nombre de d'antécédents de 0 par  $f$ .
- 2) Un de ces antécédents semble être un nombre entier. Lequel ? Confirmer votre conjecture par un calcul (calcul mental !).
- 3) Recopier et compléter  $f(x) = (x+2)(\dots x + \dots)$ .
- 4) En déduire les valeurs exactes des antécédents de 0.
- 5) Faire de même pour la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 5x^2 + 2x - 3$ .
- 6)  $\hat{=}$  Faire de même pour la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 2x^3 + x^2 - 27x - 36$ .

Contrôler les résultats obtenus en utilisant xCas.

*Pour la question 6), des élèves sont déstabilisés par le  $x^3$ . Ils ont du mal à imaginer la forme que devra prendre le résultat. Certains ont alors utilisé xCas pour trouver la forme factorisée puis ils ont analysé le résultat.*

*C'est l'occasion d'un travail technique sur le développement de produits de trois (voire quatre facteurs) conduit dans le cadre de l'approfondissement en Accompagnement Personnalisé.*

*Compétences de calcul travaillées : Calcul mental (image, choix des coefficients possibles au 3), développement y compris d'un produit de trois facteurs.*

**En AP :**

Développer  $(2x+3)(x-1)(2-x)$  ;  $(x+1)(x+2)(x-1)$ , ...

Factoriser  $(x+1)(x+2)(2-2x) + (x+2)(x^2-2)$  ; ...

Calculer  $57^2 - 56^2 - 55^2 + 54^2$  ;

Calculer  $58^2 - 57^2 - 56^2 + 55^2$

Calculer  $59^2 - 58^2 - 57^2 + 56^2$ .

Que remarque-t-on ?

Cette remarque est-elle vraie pour d'autres nombres ? Que peut-on conjecturer ?

Démontrer votre conjecture.

*Pour cet exercice, vous pourrez faire les calculs nécessaires à votre démonstration grâce à xCas.*

Calculer  $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$  ;

Calculer  $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1$  ;

Calculer  $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1$  ;

Que remarque-t-on ?

Cette remarque est-elle vraie pour d'autres nombres ? Que peut-on conjecturer ?

Démontrer votre conjecture.

**III/ Troisième temps :****Activités pour lesquelles l'élève choisit de manière autonome la méthode à utiliser :**

*On donne ici peu d'exemples puisque notre objectif est d'illustrer l'introduction progressive des méthodes de calcul permettant de résoudre ces problèmes de manière autonome.*

*Les élèves rencontreront au cours de l'année ce type de problèmes en plusieurs occasions.*

**Exercice :**

Peut-on trouver deux entiers consécutifs dont le produit est égal à 650 ?

Peut-on trouver un réel qui, une fois élevé au cube, a la même valeur que son double augmenté de 1 ?

Peut-on trouver un réel positif, qui, une fois élevé au cube, a la même valeur que son double augmenté de 1 ?

**Exercice :**

Une ville carrée de dimensions inconnues comprend une porte au milieu de chacun de ses côtés. A l'extérieur de la ville, vingt pas après la sortie nord, se trouve un arbre.

Si tu quittes la ville par la porte sud, marche quatorze pas vers le sud puis 1775 vers l'ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.

Quelles sont les dimensions de la ville ?

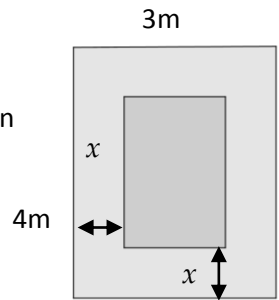
## DM :

*Fiche professeur : Ce problème donné en exemple de devoir à la maison possible peut aussi être posé dans un cadre formatif. A ce moment là, le professeur aura intérêt à ne pas introduire la lettre  $x$  dans l'énoncé.*

Pour l'aménagement de son jardin, Monsieur Delafleur veut créer un bassin bordé de plantes méditerranéennes. Il va consacrer à son projet une parcelle rectangulaire de 3m sur 4m. Monsieur Delafleur souhaite que les plantes forment une bordure de largeur  $x$  m tout autour de son bassin.

Il désire de plus que la surface formée par les plantes soit égale à celle du bassin.

Quelle valeur doit-il donner à  $x$  ?



*Les élèves ont très majoritairement commencé par mettre en équation et se sont ramenés à  $(3 - 2x)(4 - 2x) = 6$  (ou  $4x^2 - 14x + 6 = 0$ ). Ensuite, pour résoudre, les méthodes mises en œuvre sont diverses :*

- certains élèves utilisent leur calculatrice pour obtenir un tableau de valeurs et trouver une solution possible.
- Certains élèves utilisent leur calculatrice pour obtenir une solution « évidente »,  $x=3$ , puis terminent la factorisation « à la main ».
- Certains utilisent xCas pour obtenir la forme factorisée.
- Enfin d'autres, assez peu nombreux, utilisent xCas pour obtenir les solutions directement.

## Plus tard dans l'année, problème ouvert : La vitesse du vent

**Situation problème :** En l'absence de vent, un avion effectue la liaison entre deux villes A et B distantes de 308 km à la vitesse moyenne de 150 km/h.

Ce jour là, le vent a soufflé selon la direction (AB) à la même vitesse et dans le même sens pendant les trajets de l'aller et du retour.

**Problématique :** Sachant que l'avion a mis une demi-heure de plus au retour qu'à l'aller, quelle était la vitesse du vent ?

**Aide :**

- formule de la vitesse.
- selon que le vent est favorable ou défavorable, sa vitesse s'ajoute ou se retranche à celle de l'avion en vol sans vent.

**Production attendue :**

A l'aide des outils de votre choix, produire un document papier présentant les différentes étapes de la résolution du problème et mettant clairement en évidence l'utilisation du calcul manuel et du calcul instrumenté.

**Objectifs : 1)** Mettre en évidence l'interaction entre le calcul formel et le calcul instrumenté pour la résolution de problèmes sur le thème : fonctions polynômes de degré 2.

**2)** Résoudre un problème en lien avec les sciences.

**Supports, outils et données :**

- Calculatrice
- Logiciel Geogebra
- Logiciel de calcul formel : Xcas