Progression sur le thème Sens de variation Minimum - Maximum

Les activités proposées sont relatives au thème "Minimum et Maximum" étudié en classe de seconde.
Elles ont pour but de développer **progressivement** les compétences suivantes en terme de calcul manuel et instumenté.

- Identification, choix et obtention de la forme pour démontrer l'existence d'un minimum ou maximum
- Transformation d'écriture pour réaliser un tableau de signes, pour simplifier une expression, pour résoudre un problème.

A travers ces activités, on veut mettre en évidence les **interactions entre le calcul manuel et le calcul instrumenté.**
Le calcul instrumenté ne se substitue pas au calcul manuel. Il permet d'avancer lorsque la tâche devient trop technique. Il permet d'obtenir une forme souhaitée (canonique par exemple) lorsque la factorisation n'est pas apparente, ce qui ne signifie pas qu'il faut systématiquement factoriser avec le logiciel de calcul formel ...

Les compétences travaillées (en termes de calcul) sont ***en gras et italique.*** Les commentaires concernant la mise en oeuvre et les réactions des élèves sont *en italique.*

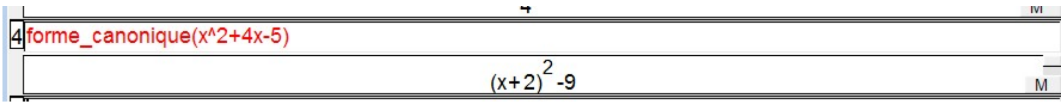
Avant de réaliser les activités proposées, les notions de minimum et maximum ont été introduites et travaillées en classe. La définition de minimum a été donnée : $f(a)$ est le minimum de f sur I intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout réel x de I, $f(a) \leqslant f(x)$. Il n'est pas nécessaire d'avoir traité les fonctions polynômes du second degré.

Cette première activité est traitée en 50 minutes. On réinvestit la notion de minimum. On rappelera, si nécessaire, la définition de minimum. A travers ce travail, l'élève sent la nécessité de ***transformer l'écriture d'une expression algébrique afin de résoudre un problème.****L'enseignant montre alors l'utilité d'un* **logiciel de calcul formel pour *réaliser la tâche.*** *On peut pour rendre encore plus motivant ce travail, placer les fonctions dans une situation de problème issu d'une modélisation.*

La bonne forme...

1. On considère la fonction f définie sur $[-5; 4]$ par $f(x) = (x+1)^2 - 6$.
   (a) Conjecturer le minimum de la fonction f sur $[-5; 4]$. En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
   Pour réaliser cette tâche, l'élève est autonome ... il peut tracer la représentation graphique de la fonction sur sa calculatrice, ou bien utiliser le menu table.
   (b) Démontrer la conjecture émise à la question précédente.

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 4x - 5$ sur $[-6; 3]$.
   (a) Conjecturer le minimum de g sur $[-6; 3]$. En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
   (b) Pourquoi ne peut-on pas reproduire la démonstration réalisée à la question 1)b) ?
   (c) On va donc transformer l'écriture algébrique de $g(x)$. Pour celà, on utilise Xcas :



   (d) Démontrer que le résultat obtenu par Xcas est bien l'expression algébrique de $g(x)$.
   On travaille ainsi le développement de la forme canonique et comment démontrer une égalité ?
   (e) Démontrer alors la conjecture émise à la question 2)a).

Suite à l'activité précédente, ce problème, issu d'une situation économique, est l'occasion dans un premier temps de modéliser puis dans un deuxième temps de réinvestir l'utilisation de la forme canonique d'une expression polynôme du second degré pour déterminer un extremum, sans avoir nécessairement traité les fonctions polynômes du second degré en amont. On peut également le rendre plus ouvert, en donnant l'expression $B(x)$ sous sa forme développée.

La dernière question du travail proposé est intéressante : l'élève est autonome pour résoudre un problème. On peut imaginer de mettre alors les élèves par groupe de 2 ou 3 élèves.

Cette activité est proposée en 1 heure.

Un problème de bénéfice...

Après une étude statistique, la propriétaire d'une salle de sport sait que, lors d'un match, si le prix du billet est x euros, le nombre de spectateurs est donné par $3150 - 225x$, avec $0 \leqslant x \leqslant 14$. Les coûts engendrés pour l'organisation d'un match s'élève à 1025 €.

1. Quelle est capacité maximale de la salle de sport ?
2. Démontrer que pour $x \in [0, 14]$, le bénéfice de cette propriétaire est donné par $B(x) = -225(x-7)^2 + 10000$.
3. Quelle recette maximale peut-elle espérer ? Pour quel prix du billet et pour combien de spectateurs ? **Justifier.**

   On réinvestit les savoir-faire de l'activité précédente, afin de résoudre un problème.
4. Combien d'argent perd-elle si elle laisse entrer tout le monde gratuitement ?
5. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la propriétaire ne perd pas d'argent.

   On laisse l'élève en autonome. Plusieurs pistes possibles pour résoudre : calculatrice, calcul formel, calcul algébrique et tableau de signes ....

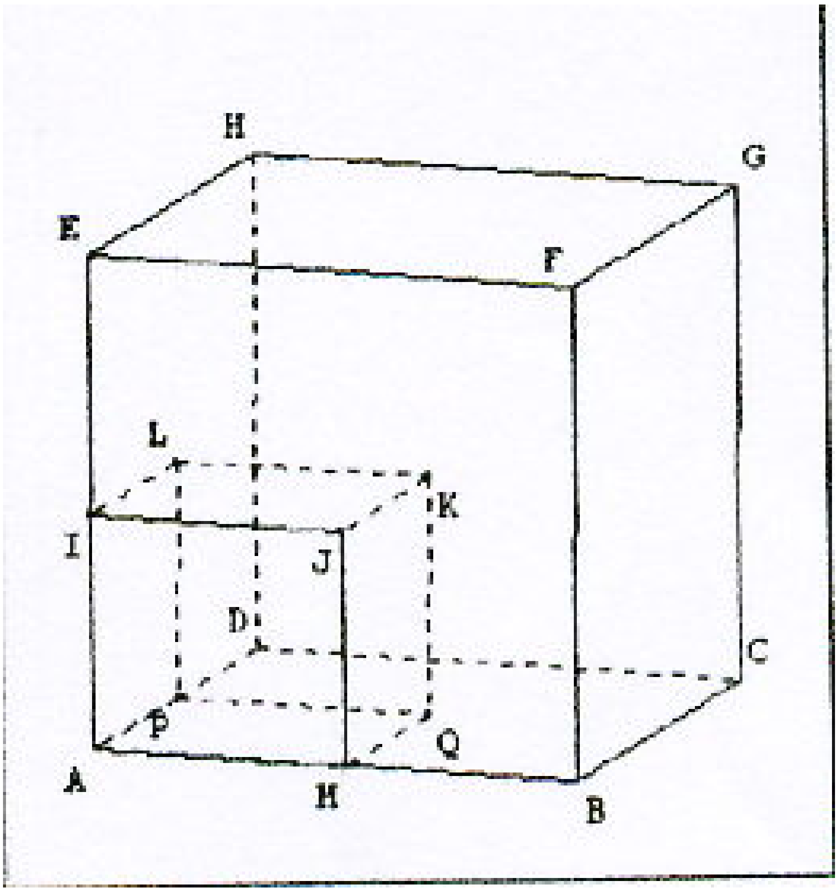
   On peut bien sûr imaginer de nombreuses INTERACTIONS entre calcul manuel et calcul instrumenté. En effet, pour résoudre l'inéquation $B(x) \geqslant 0$, la factorisation de $B(x)$ peut s'avérer délicate ... On utilise alors le calcul formel pour factoriser, et l'on finit ensuite la résolution à la main, à l'aide d'un tableau de signe.

   On réinvestit la factorisation, l'élaboration d'un tableau de signe afin de résoudre une inéquation.

Le problème suivant, issu du document ressource fonction de la classe de seconde, devient dès lors réalisable en 1 heure. En effet la mise en oeuvre de ce problème trés riche et pertinent nous semblait délicate à la lecture de son énoncé dans le document ressource. Le travail réalisé dans les activités précédentes permet de l'aborder beaucoup plus sereinement.

Une histoire de volumes...

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 6. M est un point de $[AB]$ et I un point de $[AE]$ tel que $AM = EI$. On constuit à l'intérieur du cube le parallélépipède rectangle $AMQPIJKL$ tel que $AMQP$ soit un carré.



PARTIE A : Conjecturer la position du point M pour que le volume V du parallélépipède rectangle $AMQPIJKL$ soit maximal ?

On conjecture le volume maximal et la position du point M à l'aide de geospace ...

PARTIE B : Vers une démonstration ....

On note x la longueur AM, et V la fonction qui à x associe $V(x)$, où $V(x)$ est le volume du parallélépipède rectangle $AMQPIJKL$.

1. Démontrer que pour $x \in [0;6]$, $V(x) = x^2(6-x)$
2. Pour démontrer la conjecture, on cherche à prouver que pour tout $x \in [0;6]$,

$$V(x) \leqslant V(4)$$

   Pourquoi est-il délicat ici de prouver ce résultat ?

   De riches débats naissent alors dans la classe ...

   Certains élèves pensent à utiliser Xcas afin de déterminer la forme canonique de $V(x)$ ... ils sont très déçus du résultat !
3. On se ramène alors à ce problème :

   Démontrer que pour tout $x \in [0;6]$, $V(4) - V(x) \geqslant 0$

   On réinvestit de nouveau l'élaboration d'un tableau de signes afin de résoudre une inéquation.

   Pour réaliser son tableau de signes, l'élève doit alors FACTORISER l'expression $32 - x^2(6-x)$... ***XCAS*** *est là pour l'aider à réaliser cette tâche !*
4. A l'aide de XCAS, vérifier alors le résultat :

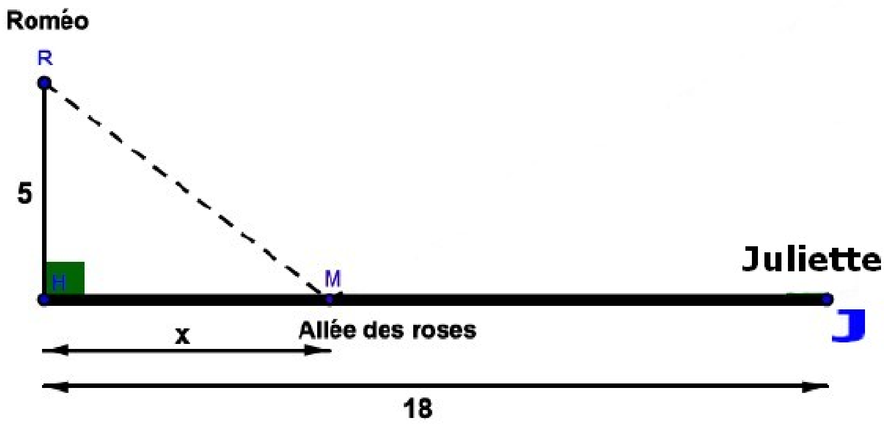
```
1 V(x):=x^2*(6-x)
      x -> x^2*(6-x)
2 fMax(V(x),x=0..6)
```

Cette activité propose un problème original afin de déterminer le minimum d'une fonction dont l'expression contient une racine carrée. Le logiciel de calcul formel intervient afin de dégager l'élève de la technicité du développement de $(a+b+c)^2$.

Ce problème peut-être soit ouvert, soit guidé.

Roméo et Juliette ...

Roméo, situé en R, est pressé d'aller rejoindre sa bien-aimée Juliette, située en J. Afin de lui faire une surprise, il désire d'abord passer par l'allée des roses tout au long de laquelle on trouve des roses, et lui acheter un beau bouquet de roses rouges. Cependant, on vend que des roses que sur $[GK]$ avec $HG = 1$ et $KJ = 1$. Le problème que l'on se pose est de déterminer **le trajet le plus court possible** pour que Roméo puisse retrouver au plus vite sa Juliette. La situation est schématisée de la façon suivante avec $RH = 5$ m ; $JK = 7$ m ; $HK = 18$ m et M un point du segment $[HK]$. On note x la longueur HM.



*Cet exercice proposé sous forme de problème ouvert montre que la grande majorité des élèves choisit une résolution fonctionelle ... et pourtant une solution géométrique à l'aide de **l'inégalité triangulaire** est tellement plus élégante. Pour cet énoncé, on peut choisir $x \in [3;15]$ et $RH = 8$ ... Cela simplifie les éventuels calculs ! Il est évident que dans ce type d'énoncé, on enlève la phrase "on note x la longueur HM."*

Voici une proposition plus fermée de ce problème :

Partie A - Résolution du problème à l'aide d'un logiciel de calcul formel

1. Démontrer que la longueur du chemin parcouru par Roméo est :

$$18 - x + \sqrt{x^2 + 25} \text{ avec } x \in [1;17]$$

2. **Donner alors à l'aide d'un logiciel de calcul formel :**
   - la position exacte de M pour laquelle la distance est minimale.
   - la valeur exacte de cette distance minimale.

Réinvestissement + Réflexion sur l'intervalle dans lequel vit x

Partie B - Résolution algébrique du problème

On définit sur $[1;17]$ la fonction f par $f(x) = \sqrt{x^2+25} + 18 - x$.

Dans la partie A, on conjecture que f est minimale pour $x = 17$ et de minimum égal à $1 + \sqrt{314}$

On se ramène très rapidement au problème suivant : Démontrer que pour tout $x \in [1;17]$, $f(x) - f(17) \geqslant 0$.

Les calculs proposés sont alors difficiles ...

On utilise le logiciel de calcul formel pour nous aider à simplifier

$f(x) - f(17) = \sqrt{25+x^2} - (x - 17 + \sqrt{314})$

On laisse l'élève en autonomie pour qu'il essaie de simplifier.... L'élève tente bien sûr de factoriser l'expression ... Il est trés déçu par Xcas ...

On apporte la première pierre à l'édifice ....

"Comment "enlever" les racines carrées ?"

On multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{25+x^2} + (x - 17 + \sqrt{314})$

On obtient (après manipulation avec Xcas) :

$$f(x) - f(17) = \frac{(34 - 2\sqrt{314})x - 578 + 34\sqrt{314}}{\sqrt{x^2+25} + x - 17 + \sqrt{314}}$$

On maitrise alors le signe du dénominateur.

Le numérateur est l'expression d'une fonction affine : on maitrise également le signe ! ! !

Voici une autre proposition de problème ouvert ...

Les ficelles ...

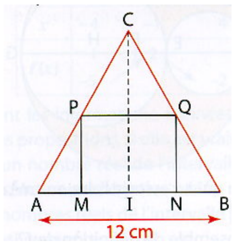
Objectifs : Mettre en évidence l'interaction entre le calcul formel et le calcul instrumenté pour la résolution d'un problème ouvert sur le thème : fonctions polynômes de degré 2.

On dispose d'une ficelle longue de 1 mètre que l'on coupe en deux. Avec un des morceaux on forme un carré, et avec l'autre, on forme un rectangle dont la longueur est le double de sa largeur.
Peut-on couper la ficelle de sorte à minimiser la somme des aires du carré et du rectangle ?

Voici une dernière activité qui montre que l'utilisation du calcul formel ne donne pas forcément l'expression algébrique sous la forme la plus agréable. Le travail proposé consiste alors à simplifier morceau par morceau la forme canonique donnée par le loigiciel... ou bien de changer de stratégie pour résoudre le problème, en utilisant la méthode de l'activité "une histoire de volumes."

Les limites du calcul formel ...

ABC est un triangle équilatéral de côté 12 cm et I est le milieu du segment $[AB]$. M est un point variable du segment $[AI]$ et N le point du segment $[AB]$ distinct de M tel que $AM = NB$.
Q est le point du segment $[BC]$ et P est le point du segment $[AC]$ tels que $MNQP$ soit un rectangle.



On note f la fonction qui à $x = AM$ (en cm) associe l'aire, en cm^2 du rectangle $MNQP$.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la (les) position(s) de M pour que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

2. Démontrer que pour tout $x \in]0;6[$,

$$f(x) = 2\sqrt{3}(6x - x^2)$$

3. Démontrer votre conjecture.

Dans cette dernière question, l'élève est bien sûr autonome ... Il doit penser à utiliser Xcas ***pour obtenir la forme canonique de l'expression*** *...Cependant Xcas ne simplifie pas très bien :*