Académie de TOULOUSE
et
Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2020
Classes de Première
Mercredi 11 mars 2020 de 10 heures 10 à 12 heures 10

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

• Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

• Les candidates ou candidats élèves de première **en séries technologiques** ou **en voie générale mais <u>ne suivant pas l'enseignement de spécialité Mathématiques</u>** doivent traiter l'exercice 1 (Séquences interdites) et l'exercice 2 (Baguettes).

• Les candidates ou candidats élèves de première **en voie générale et suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques** doivent traiter l'exercice 2 (Baguettes) et l'exercice 3 (Nombres jolis).

• L'emploi de la calculatrice est autorisé selon la règlementation en vigueur.

• Très important : <u>veiller à informer précisément les entêtes, numéros de pages et nombre de pages sur chaque copie remise</u>.

• Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Et partenaires de l'Académie de Toulouse: Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, École Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, École Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, École d'Économie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, Archives Municipales de Toulouse, Centre National d'Études Spatiales, Cité de l'Espace, Science Animation, Société des Ingénieurs et Scientifiques de France – délégation Occitanie, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 : Séquences interdites

À traiter par les candidats élèves en séries technologiques ou en voie générale mais ne suivant pas l'enseignement de spécialité Mathématiques.

Alice et Bob jouent au jeu suivant : ils tirent au sort un nombre entier N (N>2) puis chacun annonce à son tour un nombre entier compris entre 1 et N (1 et N compris).
Il y a deux règles à ce jeu :
Règle 1 : un joueur ne peut pas annoncer un nombre entier déjà annoncé par lui ou par son adversaire.
Règle 2 : un joueur ne peut pas annoncer un nombre entier qui suit ou précède immédiatement un des nombres qu'il a déjà annoncés.
Une partie se termine lorsque :
- Tous les nombres entiers compris entre 1 et N ont été annoncés. La partie est alors déclarée nulle.
- Il reste des nombres entiers entre 1 et N non annoncés mais le joueur qui « a la main » ne peut pas les annoncer à cause de la règle 2. Ce joueur a alors perdu la partie et son adversaire a gagné.

C'est toujours Alice qui commence la partie. On pourra noter par la suite A pour Alice et B pour Bob.
Par exemple, pour N=6 :

Un exemple de partie nulle
A annonce 3 ;
B annonce 2 ;
A annonce 5 ;
B annonce 4 ;
A annonce 1 ;
B annonce 6.

Un exemple de partie perdue par A
A annonce 3 ;
B annonce 1 ;
A annonce 6 ;
B annonce 5 ;
A ne peut annoncer ni 2, ni 4 ;
A a perdu.

On étudie quelques exemples de parties de ce jeu.

1. Pour N=3, montrer que Bob, s'il joue bien, peut gagner quoi qu'annonce Alice au départ.

2. On s'intéresse au cas N=4.
a) Proposer un exemple de partie gagnée par Bob.
b) Étude du jeu.
i) Alice dit : « j'annonce 1 et je ne peux pas perdre, quoi qu'annonce ensuite Bob ». Elle a raison. Pourquoi ?
ii) Alice annonce 2 et Bob déclare « je peux gagner ». Prouver que Bob a raison.
iii) Alice peut-elle, en jouant bien, être sûre de gagner ? Justifier la réponse.

3. On s'intéresse au cas N=5.
a) Alice commence par annoncer 5. Montrer qu'en annonçant 1 ensuite, Bob est sûr de gagner.
b) Montrer que Bob peut gagner en jouant bien, quoi que fasse Alice.

4. On s'intéresse au cas N=7.
a) Alice commence en annonçant 1 puis Bob annonce 7. Déduire du cas N=5 que Bob peut gagner en jouant bien quoi que fasse Alice.
b) De même prouver que Bob peut gagner quoi que fasse Alice si Alice commence la partie en annonçant 4.
c) Montrer que Bob peut gagner à coup sûr en jouant bien lorsque N=7.

5. On suppose que N=2p-1 (p entier, p≥2).
Décrire une stratégie qui permette à Bob de gagner à coup sûr la partie, quoi que joue Alice.

Exercice 2 : Baguettes

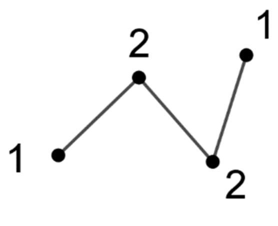
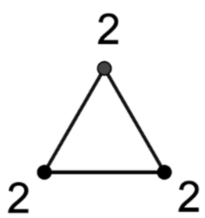
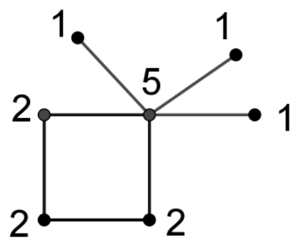
À traiter par tous les candidats.

On dispose de baguettes de même longueur avec lesquelles on réalise **des constructions planes** selon le protocole suivant :

- On pose une première baguette.
- Toutes les baguettes que l'on pose ensuite doivent avoir une (au moins) de leurs extrémités en contact avec une des extrémités d'au moins une baguette déjà posée.
- Il est interdit de superposer ou de croiser deux baguettes.

Les extrémités des baguettes utilisées sont appelées les sommets de la construction réalisée. Lorsque les extrémités de plusieurs baguettes sont en contact, on considère qu'elles sont confondues et définissent un sommet unique.
Le nombre de baguettes qui partent d'un sommet est appelé degré de ce sommet. On écrit parfois ce nombre à côté du sommet dont il est le degré.
On associe à chaque construction la liste des degrés de ses sommets, rangés dans l'ordre décroissant.

Exemples :

		
Construction A 4 sommets Liste des degrés : (2, 2, 1, 1)	**Construction B** 3 sommets Liste des degrés : (2, 2, 2)	**Construction C** 7 sommets Liste des degrés : (5, 2, 2, 2, 1, 1, 1)

PARTIE A

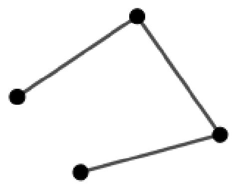
1. Tracer une construction à 4 sommets ayant pour degrés 3, 1, 1 et 1.
2. Montrer que pour chaque construction la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre de baguettes utilisées.
3. Expliquer pourquoi le nombre de sommets d'une construction réalisée avec n baguettes est inférieur ou égal à $(n + 1)$.

PARTIE B

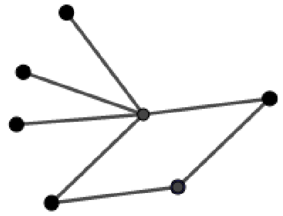
On peut déformer une construction obtenue conformément au protocole en déplaçant un ou plusieurs sommets, ceci **sans modifier les contacts existant entre les extrémités des différentes baguettes** et **sans croiser ou superposer des baguettes.**
On obtient ainsi une nouvelle construction conforme au protocole et ayant exactement le même nombre de sommets et la même liste (ordonnée) de degrés des sommets que la construction initiale.

Lorsque deux constructions se déduisent l'une de l'autre par de telles déformations, on dit qu'elles **représentent le même graphe-plan.**

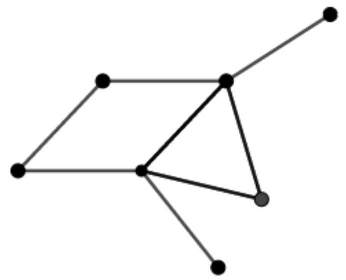
Par exemple **la construction A** représente le même graphe-plan que la construction ci-dessous.



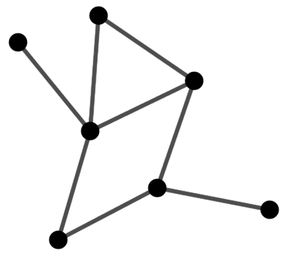
La construction C représente le même graphe-plan que la construction ci-dessous.



1. Montrer que **les constructions D et D'** ci-dessous ne représentent pas un même graphe-plan.

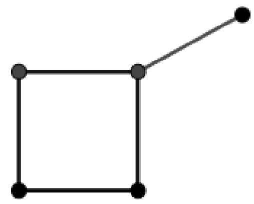


Construction D



Construction D'

2. Donner une construction ayant la même liste de degrés de sommets que **la construction E** ci-contre mais ne représentant pas le même graphe-plan que cette construction. Justifier.

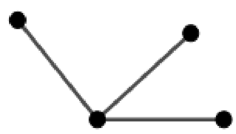


Construction E

3. La construction F ci-contre et **les constructions A et B** données plus haut sont construites avec trois baguettes.

a) Expliquer pourquoi elles représentent des graphes-plans différents.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'autres graphes-plans pouvant être représentés à l'aide de trois baguettes.

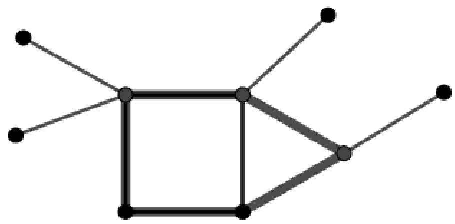


Construction F

4. Avec quatre baguettes, on peut représenter cinq graphes-plans distincts. Représenter ces graphes-plans.

PARTIE C

Un graphe-plan peut contenir une surface polygonale « fermée ». Quand celle-ci ne contient aucune autre surface polygonale fermée, on l'appelle <u>cellule du graphe-plan.</u>
Par exemple, le graphe-plan représenté ci-dessous contient une cellule de forme carrée et une cellule de forme triangulaire. Le polygone qui apparait en gras ne délimite pas une cellule du graphe-plan car il contient des cellules plus petites.



1. Combien un graphe-plan construit avec 5 baguettes peut-il contenir au maximum de cellules distinctes ? Justifier.

2. Représenter tous les graphes-plans construits avec 6 baguettes et contenant 2 cellules.

3. <u>Cette question ne sera traitée que par les candidats de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.</u>
Quel est le plus grand nombre de cellules que peut contenir un graphe-plan construit avec n ($n \geq 3$) baguettes? Justifier.

Exercice 3 : Nombres jolis

À traiter par les candidats élèves en voie générale et <u>suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques</u>.

On appelle « nombre joli » un nombre entier strictement positif dont les chiffres (en écriture décimale) sont tous différents et vont strictement en croissant de gauche à droite.
Par exemple, 189 est un nombre joli à trois chiffres.
Remarque : les nombres entiers non nuls à un chiffre sont considérés comme jolis.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas avoir le chiffre 0 dans l'écriture d'un nombre joli.

2. Quel est le plus grand nombre joli ?

3. Combien y-a-t-il de nombres jolis à deux chiffres ?

4. On choisit au hasard un nombre joli à deux chiffres.

a) Quelle est la probabilité que ce soit un nombre pair ?

b) Quelle est la probabilité que ce soit un multiple de 5 ?

5. Arthur, qui est passionné par les nombres jolis, voudrait pouvoir les compter. Pour cela, il a créé une fonction Python pour déterminer si un nombre est joli ou pas. Il a utilisé une liste L de longueur égale au nombre de chiffres avec L[0] le chiffre des unités, L[1] le chiffre des dizaines, ...
Par exemple, pour le nombre 189, L est une liste de longueur 3, avec L[0]=9 , L[1] = 8, L[2] = 1.
L'instruction **len** donne la longueur de la liste L.

```python
def nombrejoli(L):
    nbchiffre=len(L)
    joli=True
    if L[0]==0:
        joli=False
    else:
        for i in range(nbchiffre-1):
            if L[i+1]<=L[i]:
                joli=False
    return joli
```

a) Cette fonction contient une erreur. La corriger.

b) Écrire un programme en Python qui affiche combien il existe de nombres jolis à trois chiffres.

6. On s'intéresse dans cette question aux nombres jolis multiples de 11.

a) Justifier qu'un tel nombre a au moins trois chiffres.

b) On considère un nombre entier naturel *N* dont l'écriture décimale comporte trois chiffres, u, d, c, avec u le chiffre des unités, d celui des dizaines et c celui des centaines.
On a donc $N = u + d \times 10 + c \times 100$. On note alors : $N = \overline{cdu}$.
On suppose que *N* est un nombre joli multiple de 11.
On considère l'entier $\alpha = d - c$.

- **i)** Démontrer que l'entier α vérifie $1 \leq \alpha \leq 9$ et que $\alpha < u$.
- **ii)** Démontrer que le nombre $\overline{\alpha u}$ est un nombre joli multiple de 11.
- **iii)** Conclure.

c) Dénombrer les nombres jolis multiples de 11.

7. Combien y-a-t-il de nombres jolis ? Justifier.