Fonctions associées

• Partie A : Travail sur ordinateur .

1. Création de la figure :

Ouvrir le logiciel Geogebra et créer :
- deux curseurs nommés a et b variant de -5 à 5 (pas 0,1 et longueur 400) ; régler ces curseurs à $a = 3$ et $b = 2$.
- les fonctions *f et g définies par* $f(x)=x^2$ et $g(x)=f(x+a)+b$.
- le point D, sommet de la parabole d'équation $y = x^2$, et le point E sommet de la parabole d'équation $y=g(x)$: Vous déterminerez les coordonnées de E en fonction de a et b et vous placerez E sur la figure (vérifier que E reste bien le sommet de la parabole quelles que soient les valeurs de a et b).

Appeler le professeur pour vérification de votre figure.

2. Observation et conjecture :

(a) On considère la translation t qui transforme D en E : Caractériser cette translation à l'aide de a et de b.
(b) Créer un point variable A sur la courbe de la fonction f, puis son image par la transformation t.
(c) Faire varier A et les curseurs a et b. Que constate –t- on?
Rédiger de façon simple le résultat que vous avez conjecturé d'après la figure.

Appeler le professeur pour vérification.

3. Démonstration :

On veut montrer que $t(C_f) = C_g$ (c'est-à-dire que la courbe de C_f, représentative de la fonction f, a pour image la courbe C_g, représentative de la fonction g, par la translation t de vecteur $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur défini à la question 2 a).
Pour cela, on va utiliser le principe de la « double inclusion ».

(a) Montrons que $t(C_f) \subset C_g$: Soit A un point quelconque de la courbe C_f. Montrer que son image par t est sur la courbe C_g.
(b) Montrons que $C_g \subset t(C_f)$: Soit A un point quelconque de la courbe C_g. Montrer que ce point est l'image par t d'un point de la courbe C_f.
(c) Enoncer le théorème ainsi démontré.

4. Application.

Dans la figure précédente, tracer la courbe représentative de la fonction h définie par : $h(x)= x^2 - 8x + 13$.
Trouver la position des curseurs a et b pour que les courbes de g et h coïncident.
Donner alors l'expression de $g(x)$ qui se trouve dans la fenêtre algèbre.
Cette expression est la *forme canonique* de $x^2 - 8x + 13$.

• Partie B : Travail sur papier.

On utilisera dans cette partie le théorème énoncé dans la partie A, ainsi que les courbes des fonctions usuelles données en annexe.

1. On pose $g(x) =(x-3)^2 -2$.
   (a) Préciser la fonction de référence f associée à la fonction g.
   (b) Préciser le vecteur $\vec{u}$ tel que $t_{\vec{u}}(C_f)= C_g$.
   (c) Après avoir choisi deux points M et N de C_f, placer sur l'annexe jointe les points M' et N', images respectives de M et N par la translation $t_{\vec{u}}$ (on laissera apparents les traits de construction).
   (d) Tracer l'allure de la courbe C_g .

2. Mêmes questions pour les fonctions suivantes :
   (a) $g(x) = x^2 + 4x +1$ (Chercher la forme canonique $(x+a)^2 + b$).
   (b) $g(x)= 1+\dfrac{1}{x-2}$
   (c) $g(x) =\dfrac{3x+7}{x+2}$ (chercher la forme $b+\dfrac{1}{x+a}$)
   (d) $g(x) = \sin (x +\dfrac{\pi}{6})+ 1.$

ANNEXE