RECHERCHE FORMATION

DU NUMERIQUE A L'ALGEBRIQUE

AU COLLEGE ET AU LYCEE

DU NUMERIQUE A L'ALGEBRIQUE

AU COLLEGE ET AU LYCEE

Patrick LEBLANC	Lycée BORDE BASSE 0810959C	CASTRES
René LENDORMI	Collège JEAN MOULIN 0121133S	RODEZ
Christine MORET	Collège LECLERC	SAINT GAUDENS
Annie PIALOT	Lycée HENRI MATISSE 0312290W	CUGNEAUX
Jean Luc PLANET	Collège ALBERT CAMUS 0810993P	GAILLAC
Danielle WEISS	Collège 0310019C	L'ISLE EN DODON

Académie de Toulouse

Années scolaires 1997-1998 / 1998-1999 / 1999-2000

SOMMAIRE

I) INTRODUCTION

Il y a une vingtaine d'années, le calcul algébrique semblait ne fonctionner que sur des automatismes. A l'aide de batteries d'exercices, les bons élèves savaient faire, ils pouvaient passer en seconde scientifique. Les autres, résignés « à ne pas être bons en mathématiques », passaient en seconde littéraire.

L'ouverture du collège à tous les élèves, la seconde indifférenciée, la mise en place des nouveaux programmes au collège à partir de 1985, ont fait apparaître en seconde un fort déficit au niveau de la pratique du calcul algébrique.

Le constat actuel des professeurs du lycée est :

« Nos élèves ne savent plus calculer »

En janvier 1997 se sont tenus des stages inter académiques. A Nantes, un groupe de travail intitulé *« Du numérique à l'algébrique »*, posait un certain nombre de questions :

« Le passage du numérique à l'algébrique, quelles difficultés, quels obstacles, quelles problématiques ? Quels types de problèmes les élèves doivent-ils être capables de résoudre dans ces domaines ? Avec quelles techniques ? Quel travail cela suppose-t-il ? (annexe A)»

Pour relire les programmes et classer les savoirs et savoir-faire à travailler avec les élèves, nous avons utilisé les travaux de Yves Chevallard, notamment son « dictionnaire de didactique des mathématiques » dans lequel il définit les divers éléments du travail mathématique : les tâches, les techniques, les technologies et les théories.

Une **tâche** est définie par comme « une unité d'activité, reconnue comme telle dans l'institution où elle est accomplie » , par exemple : *Résoudre l'équation* $2x + 3 = 25$.

A cette notion est associée celle de **technique** (du grec *tekhnê*, savoir-faire).
Une technique a un caractère limité et elle va évoluer au long du cursus scolaire, ainsi, pour effectuer certaines tâches liées à la proportionnalité en sixième, on aura recours aux tableaux du même nom. Cette technique sera remplacée par une technique fondée sur la notion de fonction linéaire en troisième.

« Un type de tâche devient routinier pour une personne lorsqu'elle conquiert la maîtrise d'une technique permettant d'accomplir cette tâche ».

La mise en œuvre de ces techniques est possible parce que l'élève possède une certaine **technologie**, ainsi définie par Y. Chevallard : « S'il en est ainsi, pourquoi en est-il ainsi ? A cette question doit répondre une *technologie,* c'est-à-dire un discours raisonné *(logos)* à propos de la technique *(tekhnê)* mise en œuvre. »

Cette technologie est justifiée et rendue intelligible grâce à une **théorie**, c'est à dire les savoirs théoriques qui permettent de justifier les technologies. Elle est « la technologie d'une technologie ».

Une organisation mathématique «de base» comporte donc un type de tâches, une technique d'étude relative à cette tâche, une technologie relative à cette technique, et enfin une théorie relative à cette technologie. Les deux premières forment un bloc pratique (ou « praxique ») et les deux autres « l'environnement technologico-theorique ». C'est cet ensemble pratique et théorique que Y. Chevallard appelle une « praxéologie mathématique » (voir annexe B)

Dans les travaux d'Y.Chevallard, une de ses recommandations nous a particulièrement frappés :
« Etant donné un programme d'étude P, il est indispensable, pour diriger l'étude de P dans une classe, de dresser un inventaire précis des genres de tâches activées par P, afin de pouvoir programmer et gérer leur construction dans la classe »

Il nous semble donc très utile d'entraîner nos élèves à reconnaître les types de tâches qui leur sont proposés et à choisir parmi les techniques disponibles, la technique la plus adéquate. Cela suppose pour l'enseignant d'avoir réalisé une lecture préalable du programme en termes de types de tâches à accomplir. C'est ce que nous nous sommes efforcés de faire à propos des programmes d'algèbre.

Pour rédiger les tableaux présentés en annexe, il nous a semblé plus facile de distinguer « dans l'environnement technologico-théorique » :

- **les savoir élèves**, c'est à dire les définitions, théorèmes, règles, connues des élèves et sur lesquels ils peuvent s'appuyer pour justifier de l'emploi d'une technique,
- **les savoir- professeurs**, c'est à dire les théories mathématiques connues du seul professeur à un niveau d'enseignement donné.

Quand nous avons commencé à réfléchir aux difficultés de nos élèves dans l'apprentissage de l'algèbre nous avons évoqué beaucoup de problèmes. Afin d'y voir plus clair, nous nous sommes appuyés sur la notion d'**obstacle.** Guy Brousseau en donne la définition suivante : « *Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une "connaissance" ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions »* (1)

Dans sa brochure *" Didactique des mathématiques ",* Michel Henry dégage 5 caractéristiques d'un obstacle :

1- C'est une connaissance (et non une absence de connaissance !).
2- Celle-ci permet de produire des réponses adaptées à certains problèmes ou classes de problèmes.
3- Elle conduit à des réponses erronées dans d'autres types de problèmes.
4- Elle présente une résistance à toute modification ou transformation, et se manifeste de manière récurrente. (C'est à dire qu'elle redevient prédominante dans certaines situations, même après avoir été remplacée en apparence par une nouvelle connaissance).
5- Le rejet de cette connaissance aboutira à une connaissance nouvelle.

Il propose ensuite une classification des obstacles :

- Les obstacles épistémologiques

Ces obstacles sont inhérents au savoir lui-même. La complexité des concepts, et de leurs relations dans des champs conceptuels que les élèves maîtrisent peu, se heurte aux conceptions spontanées qui tendent à opposer des connaissances empiriques au savoir savant. Le statut des nombres est un de ces obstacles

- Les obstacles didactiques

Ce sont les obstacles créés par le choix de telle ou telle stratégie d'enseignement, laissant se former, lors de l'apprentissage, des connaissances erronées ou incomplètes qui se révéleront ultérieurement comme des obstacles au développement de la conceptualisation.

- Les obstacles psychologiques

Ce sont les obstacles qui se présentent lorsque l'apprentissage vient en contradiction avec des représentations profondément ancrées chez le sujet, ou lorsqu'il induit une déstabilisation inacceptable.

- Les obstacles ontogéniques

Ce sont les obstacles qui s'expriment lorsque l'apprentissage demandé est trop en décalage par rapport à la maturité conceptuelle du sujet. Quelle que soit l'explication, l'élève ne comprend pas ce qu'on lui demande, le développement de sa pensée restant étranger au terrain conceptuel sur lequel on veut l'emmener.

C'est essentiellement sur les obstacles didactiques que nous avons orienté notre recherche. Lorsque nous avons essayé de mieux comprendre l'origine des difficultés rencontrées par nos élèves, un mot s'est imposé à nous et a rapidement fait l'unanimité : **Rupture**.

En utilisant ce mot, nous ne choisissons pas un concept classique du langage des didacticiens ; seul Guy Brousseau l'emploie, à propos de « rupture du contrat didactique », mais ce n'est pas en ce sens que nous l'entendons. Pour expliquer certaines erreurs récidivantes de nos élèves nous faisons l'hypothèse qu'il existe, tant dans les programmes que dans nos pratiques professionnelles, des sauts, des manques de liens, des discontinuités, c'est cela que traduit le mot « rupture ». Parmi les définitions proposées par le Larousse Encyclopédique, on pourrait choisir celle-ci : « Opposition ou disparité soudaine entre les éléments d'une suite qui, jusqu'alors, étaient en accord ou en harmonie » Ces ruptures perturbent la connaissance déjà acquise et la rendent caduque ; elle n'est plus utilisable, ni transférable. Si l'enseignant prend conscience de cette rupture, il pourra essayer de l'adoucir, ou, dans le cas de ruptures incontournables, de mettre en place un « appareillage » didactique qui aidera l'élève à franchir ce seuil.

Pour détecter ces « ruptures », nous avons lu de façon attentive et comparative les programmes de la sixième à la seconde. Parallèlement, nous avons mené une observation détaillée du travail de nos élèves, et fait preuve d'une écoute toute particulière de leurs réflexions.

D'autre part, l'analyse devant être suffisamment fine pour être efficace, il nous a semblé raisonnable de restreindre notre champ d'étude à deux familles de tâches :

- **Différentes écritures d'un nombre**
- **Transformations d'écritures**

II) TABLEAUX D'ANALYSE

A) Par niveaux

	NUMERIQUE – ALGEBRIQUE Classe de 6$^{\text{ème}}$		
Types de tâches	<u>Techniques</u>	<u>Savoirs Elèves</u>	***Théories-Réinvestissement***
Ecrire un nombre sous différentes formes			
a) écrire un nombre sous forme décimale	Cent vingt-trois : 123 Trois dixièmes : 0,3 $\frac{1}{4}$: 0,25	Numération décimale (dixième , centième ..) division d'entiers	Troncature , arrondi , conversions .
b) écrire un nombre sous formes fractionnaires	$36{,}17 = 36 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100}$ décomposer un nombre $0{,}75 = \frac{3}{4}$	Fractions décimales Numération Multiplication et division par 10 ; 100 ...	Relation d'ordre Ranger des nombres Abscisse d'un point sur une droite graduée Encadrement Pourcentage
c) écrire un nombre en toutes lettres	301,5 : trois cent un virgule cinq $\frac{1}{3}$: un tiers	Règles d'orthographe relatives aux nombres	
d) écrire un nombre sous forme opératoire • somme • différence • produit • quotient	Effectuer des opérations Décomposer un nombre sous différentes formes d'écritures opératoires Simplifier des fractions $12{,}5 = \frac{125}{10} = \frac{25}{2}$	Tables d'opérations Connaître les multiples Critères de divisibilité	Associativité , commutativité de l'addition et de la multiplication Ordre de grandeur Approximation d'un quotient Sens des opérations Résolution d'équations Proportionnalité
e) traduire une phrase en mathématiques	Le double de : × 2 Le triple de : × 3 etc …		
f) passer du système décimal au système sexagésimal et inversement	1,5 h : 1 h 30 = $\frac{3}{2}$ h = 90 min	Système sexagésimal Unités de temps	
2) <u>Transformer une expression algébrique</u> - schématiser un calcul en utilisant des lettres	Appliquer une formule littérale (remplacer des lettres par des valeurs numériques)	Formules de périmètres Formules d'aires Formules de volumes	Statistiques Fonctions

NUMERIQUE - ALGEBRIQUE -
Classe de 5$^{\text{ème}}$

Types de tâches	Techniques	Savoirs Elèves	***Théories-Réinvestissement***
Ecrire un nombre sous différentes formes			
Numérique Organiser une succession d'opérations Ecrire l' expression correspondante	Utiliser des parenthèses Utiliser une écriture fractionnaire Passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire (réciproque?) Ecrire des aires ou des périmètres Calcul mental	Simplifier une fraction Produit de fractions Somme de fractions (même dénominateur) Partie entière et partie fractionnaire	Mise en place des rationnels
Décimaux relatifs écrire, comparer	Repérage sur une droite Déplacements sur une droite graduée	Placer des points sur une droite graduée, dans un repère du plan.	Mise en place des décimaux relatifs (ordre et addition) Structure de groupe sous jacente.
Additionner, soustraire	Supprimer certaines parenthèses (-2,5)-(-6,7)=-2,5+6,7=6,7-2,5=4,2	Ajouter deux relatifs, Soustraire, c'est ajouter l'opposé Ecrire des sommes sous forme simplifiée	Système décimal et sexagésimal. Numération
Ecrire une durée	Nombres avec ou sans virgule 3h45min=3h+3/4h=3,75 h	Autre forme d'écriture d'un nombre (parfois appelée complexe)	Mise en place du langage algébrique, limité aux positifs
Littéral Ecrire des formules	Périmètres, aires, volumes.	Remplacer des lettres par des nombres dans une formule	
Transformer une expression algébrique Développer, Factoriser Calculer en utilisant la distributivité	Problèmes d'aires ou de périmètres Ecrire en fonction d'une longueur x et chercher l'écriture la plus simple à utiliser.	Simplification des écritures Choix de l'écriture la plus performante Distributivité	Langage de l'algèbre

	NUMERIQUE ALGEBRIQUE Classe de 4ème		
Types de tâches	Techniques	Savoirs Elèves	***Théories-Réinvestissement***
Ecrire un nombre sous différentes formes 1) Ecrire un nombre relatif (forme décimale ou fractionnaire) sous forme opératoire: → somme → différence → produit → quotient	→Regrouper positifs et négatifs →Regrouper astucieusement →Recherche des opposés →Recherche des inverses	→ Transformer des écritures décimales en écritures fractionnaires et inversement → Utiliser les fractions décimales → Règles de calcul → Règle des signes → Critères de divisibilité → Multiples d'un entier →Réduire au même dénominateur → Trouver l'inverse d'un nombre	→ Simplifier des fractions → Résoudre des équations → Utiliser la calculatrice → Troncature, arrondi, encadrement
2) Ecrire un nombre à l'aide des puissances	→ Transformer un produit de facteurs égaux en utilisant les puissances → Transformer un quotient en un produit (ou l'inverse), en utilisant les puissances:	→ Définition → Conventions →Puissances de 10 → Notation de l'inverse d'un nombre non nul (a^{-1}; a^{-3}) → Propriétés des puissances	→ Utiliser la calculatrice → Simplifier des expressions → ***Racines carrées***
3) Ecrire un nombre → à l'aide des puissances de 10. → en écriture scientifique	→ Transformer l'écriture d'un décimal en un produit d'un décimal par une puissance de 10 et inversement.	→ Définition → Conventions →Puissances de 10 → Notation de l'inverse d'un nombre non nul → Propriétés des puissances →Définition de l'écriture scientifique d'un nombre	→Utiliser la calculatrice
4) Transformer des expressions numériques	→ Ecrire un nombre sous forme d'un produit et inversement Exemples: 1,32x25 + 25x0,68 12,5 x 99	→ Vocabulaire opératoire (somme, termes...) → Règles de priorité → Règles de calcul → k (a + b) = ka + kb k (a - b) = ka - kb	→ Développer, factoriser → Résoudre des équations → Calcul mental

…/…

Transformer une expression algébrique 1) Réduire une expression littérale à une variable	→ Regrouper les termes semblables → Factoriser → Réduire	→ ak + bk = (a + b) k ak - bk = (a - b) k → Règles de calcul → Priorité des puissances	→Simplifier une expression → Résoudre des équations → **Commutativité, associativité des relatifs**
2) Développer une expression littérale	→ Distribuer →Transformer un produit en une somme algébrique	→ k (a+b) = ak + bk → (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd → Règles de priorité → Règle des signes → Réduire une expression littérale	→ Résoudre des équations → ***Egalités remarquables***
3) Factoriser une expression littérale	→ Le facteur commun est apparent: un nombre, une lettre, une expression entre parenthèses → Le facteur commun n'est pas apparent: les nombres des différents termes sont tous multiples d'un même nombre	→ ak + bk = k (a+b) → Multiples d'un nombre → Propriétés des puissances	→ Simplifier un quotient → ***Egalités remarquables*** → ***Equation produit***
4) Transformer une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques	→ Remplacer la (ou les) lettre(s) par des valeurs numériques , calculer et donner le résultat sous la forme d'un nombre relatif	→ Règles des priorités → Règles de calcul → Règle des signes	→ Appliquer des formules → Ecrire en fonction de → ***Etude d'une fonction (calcul des images et des antécédents)*** → ***Construire une courbe d'équation donnée***

NUMERIQUE - ALGEBRIQUE
Classe de $3^{ème}$

Types de tâches	Techniques	Savoirs Elèves	*Théories-Réinvestissement*
Ecrire un nombre sous diverses formes •On habituera les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé •Ecrire des égalités comme: $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$	Reconnaître le membre factorisé d'une identité remarquable, écrire alors le membre développé	Les trois identités remarquables $(\sqrt{a})^2 = a$	L'ensemble des rationnels
•Ecrire des égalités telles que : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	Décomposer le nombre, ou le numérateur et le dénominateur de la fraction, en un produit, dans lequel on repère des carrés d'entiers	$\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(\sqrt{a})^2 = a$	**Première synthèse sur les nombres , mise en valeur de processus algorithmiques**
•Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible	Multiplier le numérateur et le dénominateur par la racine Factoriser numérateur et dénominateur puis simplifier. Vérifier si les nombres obtenus sont alors premiers entre eux , par l'algorithme d'Euclide	$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$ Définitions de « nombres premiers entre eux » et de « fraction irréductible »	
Transformer une expression algébrique •Factoriser des expressions telles que $(x+1)(x+2) - 5(x+2)$ ou $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$	Repérer les divers termes de la somme, puis souligner le facteur commun à tous ces termes	$ab + ac = a(b+c)$	Le corps des réels
•Factoriser $(x+5)^2-4$	**Ecrire 4 sous la forme 2^2** puis repérer là une identité remarquable	$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$	
•Développer des expressions simples	« règles de remplacement » (les négatifs entre parenthèses, certains signes « × » qui réapparaissent ...)	Les trois identités remarquables $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$	
•Utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques	Choix de la « bonne » expression		

Dans les colonnes 2 et 4, ce qui est en gras figure explicitement dans le programme

	NUMERIQUE ALGEBRIQUE **CLASSE DE 2NDE**		
Types de tâches	<u>Techniques</u>	<u>Savoirs Elèves</u>	***Théories-Réinvestissement***
Nature et écriture des nombres Décomposer un entier en produit de nombres premiers Savoir écrire un nombre rationnel sous différentes formes	Ecriture fractionnaire	Les opérations sur les rationnels : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b \times d}$ $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$	Structure de corps commutatif de $\Re$
Savoir écrire un nombre à l'aide de puissances entières	Transformer un produit de facteurs égaux en utilisant les puissances Transformer en quotient en un produit ou réciproquement	Quels que soient les réels non nuls a et b et quels que soient les entiers relatifs n et p : $a^n \times a^p = a^{n+p}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $(a^n)^p = a^{np}$	L'ensembles des puissances entières d'un réel non nul a est un sous groupe du groupe commutatif $(\Re^*, \times)$ Simplifier des expressions Racines carrées
Ecrire un nombre • *à l'aide des puissances de 10* • *en notation scientifique*	Transformer l'écriture d'un décimal en un produit d'un décimal par une puissance de 10 et réciproquement	Définition, conventions Puissances entières de 10 Notation de l'inverse d'un réel non nul Propriétés des puissances Définition de l'écriture scientifique d'un nombre	Groupe des puissances entières de 10 Utilisation de la calculatrice
Simplifier une expression comportant des radicaux	Décomposer le nombre, ou le numérateur et le dénominateur de la fraction en un produit dont un facteur est un carré parfait $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$	Pour tous réels positifs a et b $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$ Pour tout réel a $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$	$x \mapsto x^2$ bijection de $\Re_+$ sur $\Re_+$ Structure de corps de $\Re$ Méthodes pour lever une forme indéterminée

…/…

/…

Reconnaître la forme d'une expression algébrique *Développer une expression littérale*	Distribuer Réduire Transformer un produit en somme algébrique	$k(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = k\mathrm{a}+k\mathrm{b}$ $(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{c}+\mathrm{d})$ $= \mathrm{ac}+\mathrm{ad}+\mathrm{bc}+\mathrm{bd}$	(R, +, ×, ≤) corps totalement ordonné Résoudre des équations Egalités remarquables
Factoriser une expression littérale	Reconnaître un facteur commun Faire apparaître le facteur commun : $-(\mathrm{ab}) = (-\mathrm{a})\,\mathrm{b} = \mathrm{a}\,(-\mathrm{b})$ $(-\mathrm{a})(-\mathrm{b}) = \mathrm{a}\,\mathrm{b}$ Utiliser les égalités remarquables Combiner plusieurs de ces méthodes	$k\mathrm{a}+k\mathrm{b} = k(\mathrm{a}+\mathrm{b})$ $\mathrm{ac}+\mathrm{ad}+\mathrm{bc}+\mathrm{bd}$ $= (\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{c}+\mathrm{d})$ Multiples d'un nombre Propriétés des puissances	Simplifier un quotient Equation produit Equation quotient Résoudre des équations Forme canonique d'une fonction
Utiliser la valeur absolue d'un réel		$\lvert \mathrm{a} \rvert = \mathrm{d}(\mathrm{a},0)$	Passer d'un vocabulaire à l'autre : valeur absolue, distance, intervalle et encadrement Approximations Limites

Ce tableau a été élaboré à partir de l'ancien programme de seconde. Une partie des compétences attendues a disparu de l'intitulé des nouveaux programmes. Il nous semble néanmoins qu'il reste nécessaire de continuer à travailler certaines d'entre elles, comme les racines carrées par exemple. Nous les avons donc gardées.

II) ANALYSE DES RUPTURES

A- Changements autour du nombre

1) L'égalité

Le signe « = » est introduit dès le CP avec comme signification de désigner le même objet.
On le retrouve sur les calculatrices avec comme signification : effectuer.

En 6ème, on trouve différentes significations :

Changer d'écriture

- *On sait que 37,65 = 30 + 7 + 0,6 + 0,05, écris de même 75,98*
- *Donner 10 écritures différentes du nombre 18*
- *Ecrire le nombre 36 sous forme d'un produit de deux nombres, écris toutes les possibilités.*
- *Ecris 32 comme quatre sommes différentes, comme quatre différences, comme deux produits, comme deux quotients.*

Effectuer l'opération..

- *Calcule le produit de 47 par 25. 47×25 =1175, on trouve un nombre qui est le résultat.*

L'écriture du « résultat » va nécessiter l'utilisation du signe « = »
Il nous semble souhaitable que dans tous les exercices demandant d'effectuer un calcul, on insiste sur le sens premier de l'égalité, et que, au lieu de « résultat », on parle de l'écriture décimale du nombre.

Implicitement le signe « = » indique une série d'opérations à effectuer, sorte de touche « exe ».
Pourtant, en 5ème, lors de l'introduction des lettres, on va écrire $13 + x + 3 = 16 + x$, et on va s'arrêter là. On rompt avec une habitude et on accepte $16 + x$ comme réponse possible, ce qui apparaît aux yeux de nos élèves comme une opération inachevée.

Ne vaut-il mieux pas écrire : Transformer l'écriture pour obtenir une expression plus courte. La plus courte ?

Beaucoup d'exercices se font dans le sens de la simplification des écritures, il faudrait aussi, de temps en temps accepter des réponses telles que 16 + 3 comme possibles.
12 + 6 ou 2×9, sont deux écritures du même nombre 18, elles traduisent deux « histoires » différentes du nombre. Elles conservent de l'information monstrative (Y.Chevallard, petit x n°5)
Des exercices allant dans le sens contraire, tels que :

- *Donner 10 écritures du nombre 18.*

permettent de privilégier le sens premier du signe « = », c'est à dire la désignation du même objet, du même nombre.
En 3ème, lors des calculs mettant en jeu des racines, nous préconisons aussi, systématiquement d'utiliser : « Transformer l'écriture de… » au lieu de : « Simplifier ».
Il semble important de signaler que dans ce chapitre on travaille plus sur l'écriture des entiers que sur l'utilisation du symbole $\sqrt{}$..

- *Imaginer des situations différentes qui nécessitent le choix de chaque écriture.*
  $\frac{7}{2}$; $7:2$; $7\times\frac{1}{2}$; $3,5$; $3+\frac{1}{2}$; $\frac{35}{100}$....
  $\frac{6\pi}{4}$; $6\pi : 4$; $6\pi\times\frac{1}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$.

- *A l'aide des chiffres 5 et 7 utilisés une seule fois, des signes opératoires, écrire le plus de nombres possibles.*
  (Pour cet exercice, il s'agit d'opposer les différentes écritures d'un nombre utilisant l'égalité et les écritures de différents nombres utilisant des symboles communs)

- $a = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = 1,75$;
  $A(x) = 4x - 3$; $B(x) = \frac{3}{8} - 5 + x$; $C(x) = 3x - 2,25$
  Choisir la meilleure écriture de a pour calculer A(a), B(a),C(a).

2) *Le nombre décimal*

Un point de rupture, déjà travaillé à l'école primaire, est le passage du nombre entier au nombre décimal.
Des erreurs telles que : $1,7 \times 2 = 2,14$ révèlent chez l'élève une priorité donnée à la technique par rapport au sens. Le décimal est encore compris comme la juxtaposition de deux entiers. L'introduction des décimaux avec des prix ou avec des mesures a conforté l'élève dans cette compréhension.
2,56 F = 2F et 56 centimes 3,782 m = 3 m et 782 mm etc…

Le même problème posé dans le cadre des entiers ou dans celui des décimaux présente des difficultés sans commune mesure :

- *3 kg de pommes coûtent 15F. Combien coûte un kilogramme ?*
- *3 kg de pommes coûtent 17,10F. Combien coûte un kilogramme ?*
- *3,5 kg de pommes coûtent 17,5F. Combien coûte un kilogramme ?*
- *0,750 kg de pommes coûtent 4,5F. Combien coûte un kilogramme ?*

Le décimal n'est pas reconnu comme un nombre à part entier avec les même propriétés opératoires que les entiers.
Pour résoudre un problème tel que : Trouver le prix de 3,5 kg de pommes qui coûtent 6,5F le kg, certains élèves ont encore besoin de chercher le prix de 3kg puis de 500g.

Au primaire et en 6ème, 35,76 est encore écrit 30 + 5 + 0,7 + 0,06 ou $35 + \frac{7}{10} + \frac{6}{100}$
Lors de l'introduction des écritures puissances en 4ème, il semble souhaitable pour bien assurer la continuité des apprentissages de faire écrire :

- $35,76 = 3\times 10 + 5 + 7\times 10^{-1} + 6\times 10^{-2}$

Ce type d'exercices redonne au nombre décimal son sens et élimine l'idée du nombre à virgule.

La question habituelle :

- *« 40 est-il un nombre décimal »*

a alors toute sa pertinence.

Poser que 40 peut s'écrire 40,0 n'a de sens que si le chiffre des dixièmes est nécessaire par exemple si on veut réduire 40 – 8,7.

Il faut peut être se poser alors la question de l'existence des décimaux en temps qu'ensemble de nombres. Ne serait-il pas alors préférable de toujours parler de l'écriture décimale d'un nombre.

En effet, la construction des différents types de nombres se fait ainsi :

* Les entiers naturels, avec les axiomes qui les régissent.
* Les entiers relatifs comme solutions des équations a + x = b, quels que soient a et b naturels.
* Les nombres rationnels comme solutions des équations a x = b, quels que soient a et b entiers relatifs ($a\neq 0$)
* Les nombres réels comme compléments des rationnels pour la bijection avec une droite graduée (certains irrationnels sont solutions d'équations).
* Les nombres complexes comme solutions d'équations sans solution dans l'ensemble des réels.

* Les nombres décimaux ne sont pas nécessaires dans la construction des ensembles de nombres. Leur existence n'est due qu'à l'utilisation de la numération décimale (base 10) pour écrire les entiers naturels.

Par opposition aux nombres « mathématiques » on peut qualifier les décimaux de nombres « politiques ». Leur existence tient-elle au fait que nous avons 10 doigts ?

Il y a là une rupture forte avec l'enseignement des autres matières (Physique, Technologie, Economie…), avec les nombres manipulés dans la vie hors de l'école (prix, grandeurs….). Pratiquement tous les nombres qui nous entourent sont donnés par leur écriture décimale, exacte ou approchée, sans que la distinction ne soit faite, car cela n'a aucune importance dans le contexte.

3) *Le nombre rationnel*

- De la notion de partage à la notion de nombre.

Au cycle 3 de l'école primaire, il y a nécessité de faire apparaître de nouveaux nombres, comme réponse à de nouveaux problèmes.

Il faudrait faire le lien entre « $\frac{3}{4}$ de » et le nombre $\frac{3}{4}$ placé sur une droite graduée

parties. Le nombre $\frac{3}{4}$ signifie $\frac{3}{4}$ de l'unité, ce qu'il faudrait préciser de façon systématique.

$\frac{3}{4} \times 7$ traduit $\frac{3}{4}$ de 7, or que traduit 2 x 7 ?

On ne dira pas 2 de 7 mais le double de 7. Le vocabulaire employé a changé, est-ce évident pour tous les élèves, le signale-t-on suffisamment ?

En $6^{ème}$, le nombre $\frac{3}{4}$ est présenté comme la solution de 4 x = 3, c'est à dire le nombre tel que : $\frac{3}{4}\times 4 = 3$.

Du problème concret du partage, on passe à une définition mathématique qui doit satisfaire aux règles de calcul déjà établies pour les entiers. Cette définition ne doit pas être oubliée mais mise en valeur aussi dans les années suivantes, sans quoi le côté technique (voire les automatismes) menacent de l'évacuer.

Il n'y a qu'à poser la question : « quel est le nombre qui multiplié par 7 donne 11 ? » pour se rendre compte que l'écriture $\frac{11}{7}$ n'est pas reconnue comme un nombre par une très forte proportion d'élèves, quel que soit leur niveau.

En $5^{\text{ème}}$ puis en $4^{\text{ème}}$, la manipulation des fractions devient essentiellement technique. Les règles de réduction d'écritures employées le sont en référence à la structure des rationnels, avec de moins en moins de supports concrets.

- Différentes écritures d'un rationnel.

Si des écritures telles que : 45 = 9 x 5 = 40 + 5 = …..prennent du sens selon le problème posé, qu'en est-il de $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \ldots$ Les exercices de simplification d'écritures restent techniques. Pourquoi simplifier une écriture, alors que valeur décimale exacte ou approchée est donnée de la même façon par une calculatrice, quelle que soit l'écriture choisie ?
Le calcul mental peut apporter une réponse, le calcul à la main aussi. Toutes les formes de calcul doivent être utilisées.
L'utilisation de l'écriture simplifiée d'une fraction devient quasiment obligatoire pour des exercices tels que : « Réduire l'écriture de $\frac{105}{252} + \frac{209}{396}$». Encore faut-il interdire l'usage de la calculatrice.

- Choix de l'écriture :

45 = 40 + 5	est utile pour placer 45 sur une droite graduée en dizaines.
45 = 9 x 5	entraîne $\frac{45}{9} = 5$ et $\frac{45}{5} = 9$
45 = 7 x 6 + 3	entraîne $\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}$

Pour placer $\frac{45}{7}$ sur une droite graduée est-il plus facile de partager
[0 ; 45] en 7 parties ou [6 ; 7] en 7.parties ?

Cette écriture est à rapprocher de $\frac{45}{10} = 4 + \frac{5}{10} = 4 + 0{,}5 = 4{,}5$
Si on compare les écritures $\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}$, et $\frac{45}{10} = 4 + \frac{5}{10}$, le deuxième exemple pose moins de problèmes que le premier, on y retrouve les mêmes chiffres (rôle de la numération décimale).

- Ecriture $a + \frac{b}{c}$.

Quelle écriture choisir pour le nombre : $\frac{252}{105}$?

$\frac{252}{105} = 2 + \frac{42}{105}$	comment le placer sur une droite graduée ?
$= 2 + \frac{2}{5}$	plus facile à placer entre 2 et 3
$= \frac{12}{5}$	écriture irréductible, $\frac{252}{105} \times 5 = 12$

Pour simplifier $\frac{252}{105}$, il faut connaître les diviseurs communs aux deux nombres, la connaissance du plus grand n'est pas exigible, c'est un des moyens.

Il ne faut pas oublier que cette forme d'écriture est utilisée pour le temps.

3 h $\frac{1}{4}$ est plus porteur de signification que 3,25 h. Cette dernière écriture a tendance à devenir 3h25min.

- *Entourer le résultat qui a le plus de sens.*
- *Le trajet a duré :*

  4 h+ $\frac{1}{4}$ *h ; 255 min ; 4,25 h ;* $\frac{17}{4}$ *h ; 4 h 15 min ; 4 h 15.*
- *Mes chances de réussite sont :* $\frac{24}{100}$ *; 0,24 ;* $\frac{6}{25}$ *;* $\frac{2,4}{10}$.
- *Dans un train de 25 wagons de voyageurs, chaque wagon est prévu pour 12 personnes assises et 20 debout. Le nombre maximum de voyageurs est :*

  25×12 + 25×20 ; 25×32 ; 800.

Avez vous entouré le résultat qui se présente sous la forme la plus courte ?
Quand est-il possible d'accepter un résultat sous forme d'opération non effectuée ?
Quand est-il obligatoire d'accepter un résultat sous forme d'opération non effectuée ?

4) *Ecriture avec des puissances*

- **En 6ème et 5ème**

Dans l'écriture des fractions décimales, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ sont utilisés mais 10^2, 10^3, n'apparaissent pas.

a^2, a^3 ne sont que des simplifications d'écritures dans l'écriture des aires et des volumes.
L'utilisation des exposants ne pose pas de problèmes

- **En 4ème**

10^n et a^n sont définis comme des écritures de nombres. C'est une troisième rupture dans l'écriture des nombres, après l'introduction de la virgule et du trait de fraction, l'exposant n'est pas compris comme un code.

Dans le calcul manuel ou mental de 7^5 les élèves veulent « utiliser » le 5, jusqu'à présent on a toujours utilisé tous les nombres écrits. L'exposant n'est plus un nombre à utiliser dans une opération, il ne sert qu'à compter.
Il y a un changement de fonction du nombre écrit en exposant.

Dans 5^{-3}, Quelle est la fonction du signe « — » ? Les élèves n'ont pas conscience de la fonction différente de l'exposant. D'autre part, s'ils ont compris que l'exposant sert à compter, comment compter –3 ? Les exposants négatifs, importants pour les puissances de 10, posent des problèmes pour les autres nombres. a^{-3} n'est pas perçu comme l'écriture d'un nombre utile dans certaines situations uniquement.
a^{-1} : c'est une notation de l'inverse, il y a risque de confusion au lycée avec la notation de la fonction réciproque. (Voir le programme de seconde, qui reprend celui de 4ème).

Il nous semble plus important, sur les puissances, de manipuler des écritures en revenant au sens premier que de manipuler des formules. Les formules, qui ne permettent que de gagner du temps pour des exposants « non raisonnables » s'imposeront elles même quand ce sera nécessaire.
Parfois, $2 \times 2 \times \ldots. \times 2$ (7 nombres 2) est plus accessible que 2^7.
Revenir au sens est important pour distinguer : $(-2)^7$ de -2^7 ou $(-2)^6$ de -2^6.

Exposants pairs, $(-3)^2$ et -3^2
$(-4)^{-5}$? On sait qu'il faut regarder une parité, mais de quel nombre ? Quelle est la parité d'un nombre négatif ?

$(\times 10^n)$ est défini comme un déplacement de virgule dans l'écriture scientifique.
Il y a souvent confusion et rupture entre 10^n et $(\times 10^n)$, surtout dans l'emploi de certaines calculatrices.
Le lien avec l'écriture décimale d'un nombre n'est pas fait :
35,76 n'apparaît pas suffisamment comme $3\text{x}10^1 + 5\text{x}10^0 + 7\text{x}10^{-1} + 6\text{x}10^{-2}$.

Une rupture importante est la correspondance entre le produit de puissances et la somme des exposants.

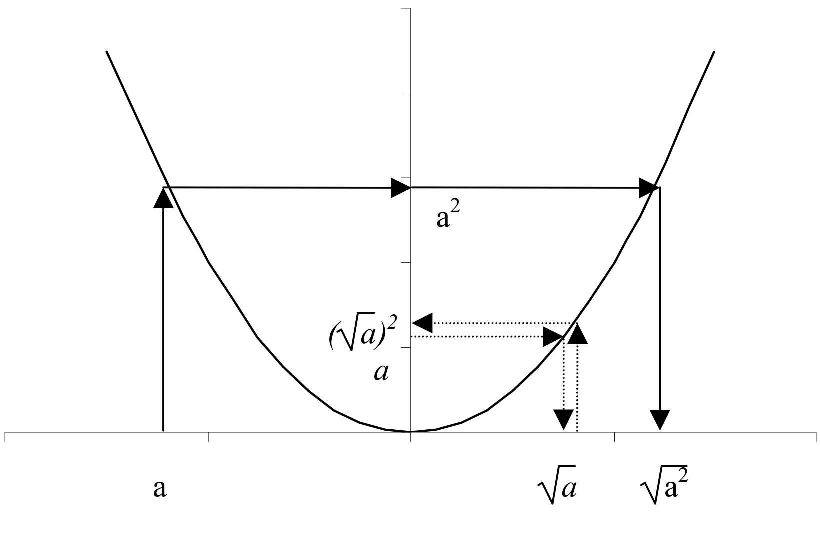
En 4ème et ensuite.. 10^{-3} , 2^{-3}, 2 -03 , 2 E -03 , 2 x^y -03, ne sont pas ressentis comme des écritures de nombres, qui ont le même sens.

En 3ème
Après l'introduction des produits remarquables il y a rupture entre $(ab)^2$ et $(a+b)^2$. On applique à des écritures semblables des règles différentes(Voir le paragraphe sur la linéarité).

Difficulté à reconnaître des carrés :
$4 = 2^2$, pour factoriser $(x-5)^2-4$

$\sqrt{18} \times \sqrt{50} = \sqrt{9 \times 4 \times 25} = ?$ Repérer la décomposition en produit de carrés est difficile. On retrouve dans tous ces exercices l'obligation de changer de registre. Le travail demandé ne porte que très peu sur le symbole √. En fait sans que cela soit toujours clairement indiqué, l'objectif reste de choisir la « meilleure » des écritures. Comment choisir la « meilleure » si on ne sait pas qu'il y en a plusieurs ?

A propos des écritures. $\sqrt{a^2}$ et $(\sqrt{a})^2$. Quelles sont les priorités ?
Si on a introduit la racine carrée à l'aide de la fonction définie par $f(x) = x^2$, il faut faire prendre conscience que $\sqrt{a^2}$ se lit sur l'axe des abscisses et que $(\sqrt{a})^2$ se lit sur l'axe des ordonnées. Le signe de a prend alors de l'importance pour la lecture.



Dans l'écriture $\sqrt{a^2}$, a est sur l'axe des x, donc il peut être positif ou négatif.
Dans l'écriture $(\sqrt{a})^2$, a est sur l'axe des y, donc il doit être positif

En 2^{nde}

« Objectifs : Approfondir la connaissance des différents types de nombres….Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolutions de problèmes ou de démonstrations….. Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révisions systématiques, mais se retrouvent au travers des différents chapitres…. » (BO n°6 du 12/08/99)
« il faut s'assurer que les conventions de priorité, en particulier celles relatives aux exposants sont maîtrisées à l'issue du collège » (document d'accompagnement des programmes de 2^{nde}).

On réinvestit les connaissances concernant les puissances lors de l'étude des suites et en probabilités.

Les exposants, surtout négatifs, sont un savoir très technique. Peu réutilisés, ils perdent de leur sens et n'apportent pas par la suite au lycée les simplifications de calculs attendues.

5) Les irrationnels

Ils apparaissent progressivement à partir de la $3^{ème}$, si on excepte π.
Il nous semble important de systématiquement rappeler qu'ils ont un comportement analogue à celui de la lettre dans nombre d'écritures.
Il faut opposer des réductions telles que : $\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$ et $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
Il y a là une rupture très forte entre deux techniques appliquées aux mêmes nombres.

- *Construire des segments de longueurs*

$$2 \;;\; 2{,}7 \;;\; \frac{4}{3} \;;\; \sqrt{2} \;;\; \sqrt{5}\;;\; (\pi)\;?$$

6) *Approximations*

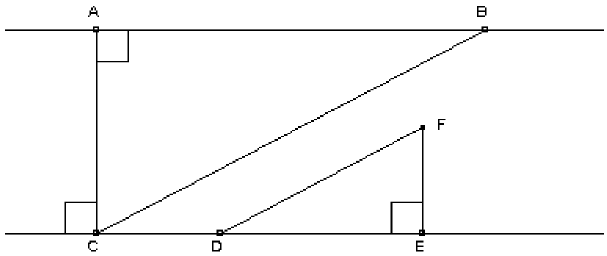
Dès la $6^{ème}$, π commence à prendre sa véritable signification. π n'est plus égal à 3,14.
C'est là une rupture importante pour les élèves. Quelle « valeur » faut-il prendre ?
Accepter comme résultat : $V = 5\ \pi\ cm^2$ commence à poser la question du statut de la lettre. Il est beaucoup plus rassurant d'écrire : $V = 15,7\ cm^2$ ou $V \approx 15,7\ cm^2$.

Cette rupture peut commencer à être aplanie en $3^{ème}$ si on insiste un peu plus sur les différents ensembles de nombres.

La première des capacités attendues d'un élève de seconde est :
Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter le résultat donné par une calculatrice.
Il ne faut surtout pas attendre la seconde pour y préparer nos élèves.

L'écriture $3\text{-}\pi$ représente-t-elle un nombre pour nos élèves ? Si oui, lequel ?
La résolution de l'équation : $-5x < 3$ est supposée acquise à l'entrée en seconde.
Celle de $(3-\pi)x < 3$ nécessite de chercher d'abord une valeur approchée de $3-\pi$.
Or, le nombre qui intervient dans la résolution n'est pas la valeur approchée qui vient d'être calculée.
Que faut-il utiliser $3-\pi$ ou sa valeur approchée ?
Il y a là une question que la plupart des élèves oublient de se poser.

•



Sur la figure ci dessus, AB = 18 ; AC = 7,5 ; EF = 5 ; FD = 13.
Les droites (BC) et (DF) sont-elles parallèles ?

(L'usage des formules de trigonométrie donne pour $\widehat{BCE}$ et $\widehat{FDE}$ le même affichage sur la calculatrice. Peut on en déduire l'égalité ? Faut-il développer une autre méthode ?)

B- Introduction de la lettre *et ses différents rôles*

Lorsque nous abordons le calcul littéral en 5ème, nous constatons que les écritures suivantes n'ont-pas la même signification pour les élèves ?

2 + 3 = 5
□ + 3 = 5
. + 3 = 5
? + 3 = 5
x + 3 = 5

Le symbole □ creux ou le point qui évoque les exercices à trous, semble poser moins de problèmes aux élèves, comme s'ils permettaient de placer quelque chose là, alors que la lettre occupe déjà cette place ?

Les différents rôles de la lettre.

- La lettre inconnue, dans une équation.

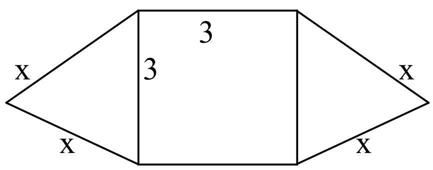
Ce n'est qu'un exemple, parmi d'autres d'utilisation de la lettre. Il faut donc se garder de croire que toute écriture contenant une ou plusieurs lettres est une équation.
Une équation est une égalité qui contient des nombres, certains écrits avec des chiffres et des symboles opératoires, d'autres écrits avec des lettres. Une équation est souvent issue de la recherche d'un problème, elle pose une question. Quel nombre faut-il mettre à la place de la lettre pour que l'égalité soit vraie ? La lettre est mise en attente, à la place d'un nombre inconnu, elle permet de traduire le problème par une écriture mathématique.

- La lettre variable.

Un même calcul à effectuer pour différents nombres peut être traduit par une expression contenant provisoirement une lettre qui remplace tous les nombres qui seront à utiliser.
Ex : A tout nombre on associe la somme du triple de son cube, de son double et de cinq.
Ainsi, à 2 on associe : $3\times2^3+2\times2+5$.
La description du procédé est la donnée d'une **fonction** qui peut être définie par $f(x)=3x^3+2x+5$.
Cette expression peut permettre de calculer l'image de n'importe quel nombre.
On retrouve la notion de variable dans l'utilisation d'un tableur, l'étude de séries statistiques.

- *On demande toujours de remplacer la lettre par un nombre. Et si on demandait le contraire ?*
  A = 7 + 2 + 14, remplacer 7 par a.
  A = a + 2 + 2a
  A = a + (a – 5) + (a - 5) a
  Donner d'autres écritures.

Les exercices utilisant des « figures mobiles » permettent dès la 5ème de montrer l'importance du rôle de la lettre en tant que variable.

- 

  Faire la figure pour x= 2, 3, 4.
  Calculer le périmètre dans chaque cas
  Exprimer le périmètre en fonction de x.

- La lettre indéterminée

La manipulation d'écritures littérales donne un autre statut à la lettre. Il n'y a plus rien à trouver. Les objectifs ont changé et on ne le souligne pas assez. Il s'agit d'une sorte de jeu (pour les profs pas pour les élèves). Changer d'écriture ? Oui. Mais pourquoi faire ?

L'entraînement à des changements d'écritures d'expressions littérales est un « mal nécessaire ». Maîtriser les différentes écritures d'une expression permet de choisir rapidement celle qui est le mieux adaptée au problème posé .
Développer, réduire, factoriser, « simplifier »....sont des problèmes techniques qui trouvent leurs justifications dans la résolution d'équations, dans l'étude des fonctions....

- *Voici différentes propositions de changements d'écritures. Pour chacune d'elles, identifier les techniques utilisées.*

* $-5x + 4x = -x$ $\qquad$ $-5x + 4x = (-5+4)x = (-1)x = -x$

*
$$\begin{array}{r} 2x + 2 \\ \times\ 5x + 4 \\ \hline 12x + 8 \\ 15x^2 + 10x \\ \hline 15x^2 + 22x + 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(3x + 2)(5x + 4) &= 15x^2 + 10x + 12x + 8 \\ &= 15x^2 + 22x + 8\end{aligned}$$

*
$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 7 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 5 &= 7 \\ 3x &= 7 - 5 \\ 3 \times x &= 2 \\ x &= 2 \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

* *Quelle technique précédente utiliser pour simplifier si possible ?*

$2x + 3y$ $\qquad$ $x\sqrt{3} - x\sqrt{2}$ $\qquad$ $8 - 2\sqrt{3}$
$2 + 3x$ $\qquad$ $x + 3 - 5$

- Des confusions possibles dues au changement de rôle de la lettre au sein d'un même exercice
  - Tester une égalité : Dans l'égalité à tester, la lettre est indéterminée
    Quand on calcule séparément chaque membre, elle devient variable.
  - Dans un même problème, la lettre peut avoir successivement plusieurs rôles.

  Pour un fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+2}$, x est d'abord variable.
  Elle devient inconnue pour répondre aux questions telles que : quel est le domaine de définition de f ? quel est l'antécédent de 3 par f ?
  Elle devient indéterminée si on veut faire apparaître les comportements à l'infini avec l'écriture $f(x) = 5 - \dfrac{12}{x+2}$.

- La lettre dans des formules.

Les formules de calcul d'aires ou de volumes contiennent des lettres ayant des significations « codées » précises. Si on écrit $V = \frac{1}{3}Bh$, B est reconnu comme l'aire de la base, h comme la longueur de la hauteur dans une pyramide. Cette formule traduit l'écriture d'une fonction à deux variables. B et h sont parfois données (donc variables) parfois inconnues (il faut alors résoudre une équation pour les calculer).
Les « identités remarquables », sont des formules permettant des changements d'écritures. Comme elles contiennent le signe « = » et que les lettres a, b, c, n'ont pas de statut particulier elles peuvent être prises pour des équations. Attention aux identités écrites avec x, y, ou z !

- La lettre en géométrie analytique.

La lettre devient coordonnée, elle est associée à un point de la droite, en couple elles sont associées à un point du plan. La polysémie de certains mots n'aide pas à s'y retrouver.
Tracer la courbe d'**équation** : $y = 3x^2 - 1$. x est à la fois variable, inconnue, coordonnée, très fortement liée à y qui a les mêmes rôles.

C- La lettre bouge

- De plus la lettre a des natures différentes.

C'est une mesure dans les formules d'aires et de volume donc naturellement un nombre positif.
L'utilisation du théorème de Pythagore puis l'apparition de l'écriture $\sqrt{a}$ sous-entendent que a est un positif.
Ce n'est plus obligatoirement le cas ensuite. On introduit une notion dans un cadre puis on passe à un cadre plus général qui oblige à prendre des précautions. Complexifier une situation à peu près connue est difficile, il faut que nous, professeurs, insistions sans arrêt sur cette rupture.

- Non contente d'avoir compliqué le tout, la lettre elle-même se met à changer ! Elle se transforme, elle prend une écriture plus complexe.

Un élève sait écrire : $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$ et même : $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Que devient sa connaissance si a = x-3 et b = 2 ? $-\frac{x-3}{2} = ?$

$2 - \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{b}$. Que devient $2 - \frac{x-3}{2}$?

La deuxième écriture n'est pas le prolongement naturel de la première. La difficulté est d'un tout autre ordre.

- *Enoncer les théorèmes qui justifient les égalités suivantes :*

  * $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$

  * $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

  * $2 - \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{b}$

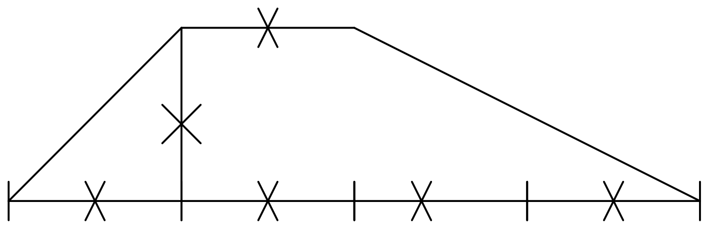
- $-\frac{3}{2} a \times (8a) = 12\, a^2$

- $\frac{5}{2} - (\frac{3-x}{2}) = \frac{5-(3-x)}{2} = \frac{5-3+x}{2} = \frac{2+x}{2}$

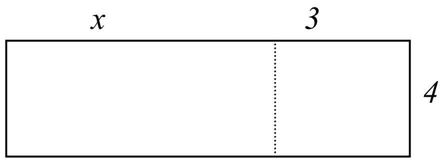
- *Remplir le tableau en respectant les consignes de calcul données*

x	0	1	2
$x - \dfrac{1-x}{2}$			
$x - (1 - x) : 2$			
$x - 1 - x : 2$			
$\dfrac{2x - 1 - x}{2}$			
$\dfrac{2x - 1 + x}{2}$			
$\dfrac{3x - 1}{2}$			

- *A partir de l'égalité :* $2 - \dfrac{a}{3} = \dfrac{6-a}{3}$, *écrire de nouvelles égalités en remplaçant a par 1 puis par –3 puis par (x + 3) puis par…..*

- 

En appliquant la formule, calculer l'aire du trapèze ci dessus si :
Chaque segment codé mesure 4 cm, a cm, 2a cm, $\dfrac{a}{2}$ *cm, a+1 cm.*

- 

Donner deux écritures pour son périmètre et deux écritures pour son aire.
Si on double les dimensions, que deviennent-ils ?

De même, en 1ère S, on démontre et on utilise les formules de duplication des angles :
Cos 2x = ……   sin 2x = …….
Sin x = 2 sin $\dfrac{x}{2}$ cos $\dfrac{x}{2}$ semble toujours être une autre formule différente des premières.
Il y a là une difficulté souvent ignorée qu'il faut faire travailler. Il faut insister sur la variabilité de la variable. Variabilité numérique mais surtout variabilité littérale.

Cette variabilité est travaillée lors de l'étude des suites numériques.
La difficulté des notations u_n, u_{2n}, u_{n+1} est reconnue.

On peut imaginer que l'entraînement à plus de souplesse dans l'écriture d'un nombre, comme : $x = 2 \times \frac{x}{2}$, permettrait en terminale de ne plus faire apparaître les transformations d'écritures telles que $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \times \frac{\sin 3x}{3x}$, comme des astuces « miraculeuses ».

- *Faire varier les lettres « muettes » dans des formules.*
  * $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$
  Ecrire la formule pour $u = x$
  puis pour $u = \frac{x}{2}$; $u = 3x$; $u = 2x$ et $u = \frac{5\pi}{6}$
- *On a ; $f(x) = -(x-2)^2 + 4 = x(4-x) = -x^2 + 4x$*
  Quelle est l'expression la plus favorable pour calculer
  $f(2)$; $f(4)$; $f(\frac{1}{3})$; $f(2-a)$; $f(2+a)$?

- *On a $g(x) = 5 - \frac{x-2}{5} = \frac{27-x}{5}$.*
  Quelle est l'expression la plus favorable pour calculer
  $G(2)$; $g(27)$; $g(\frac{1}{3})$; $g(2-a)$; $g(2+a)$?

- *On donne $h(x) = 9(x+1)^2 - 25(x-1)^2$*
  Développer, réduire puis factoriser $h(x)$.
  Quelles sont les priorités à respecter dans la calcul de $h(2)$?
  Même question pour $h(1+a)$.

- *Les questions de priorités se posent aussi pour le calcul numérique.*

$(-3)^2$ *et* -3^2

$\sqrt{3^2 + 5^2}$ *et* $\sqrt{3^2} + \sqrt{5^2}$;

$(3^2 + 5^2)^2$ *et* $(3^2)^2 + (5^2)^2$

$(x-2)^2 - 4$ *et* $(7-2)^2 - 4$

$\frac{x-2}{6} - \frac{3x+1}{12}$ *et* $\frac{7-2}{6} - \frac{3\times 7+1}{12}$

$(a+b+c)^2$ *et* $(5-7+3)^2$

- *Manipulation des lettres :*
  a est un réel positif ou nul. $b = \frac{4a+2}{a+5}$ *et* $c = \frac{a-1}{a+2}$
  Démontrer que $\frac{b-1}{b+2} = \frac{c}{2}$ *et que* $b = \frac{2c+2}{2-c}$

D- Le vocabulaire

Les observations suivantes ne sont plus liées au nombre ou à la lettre, mais elles interviennent tout au long de la scolarité pour brouiller les messages.

Le même verbe de consigne est utilisé à des fins différentes :

Vérifier que le résultat est plausible.
Vérifier que 5 est solution de….
Vérifier que f(x) peut s'écrire…..
Vérifier que l'égalité est vraie.
………..
Démontrer que 3 est solution de…
Démontrer que pour tout x, A(x) = B(x).
Démontrer que le triangle est rectangle.

Comparer

- Que signifie comparer ?
  « = » - *Comparer $(3x-2)^2$ et $9x^2-12x+4$*
  ou
  « ≠ » ≤ ou ≥ - *Comparer le volume d'un cube et celui d'une sphère*
  ou - *Comparer* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\frac{27}{7}$, $\frac{355}{113}$, π.
  Quotient, rapport - *Comparer les volumes de deux pyramides*
  Opposés, inverses (agrandissements, réductions)
  - *Comparer $5(x-1)^2$ et $(5x-5)^2$*
  - *Comparer* $A = \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}$
  $B = (3 - \sqrt{5})^2 + 2(25 - \sqrt{45})$
  $C = \dfrac{-2{,}4 \times 10^7 \times 8 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}}$

- *-Est-il préférable d'acheter un melon de 10cm de rayon ou deux melons de 5cm de rayon ?
  *-Etant donné $f(x)=x^3-x^2+3x-1$, démontrer que pour tout x, $x-2 \leq f(x) \leq x$
  *-Sachant que $n \geq 3$, prouver que $e^{\frac{n-2}{n^2}} \rangle 1$
  Dans ces trois exemples, la tâche est de comparer, le mot n'est pas utilisé.

- La même tâche peut être proposée à l'aide de verbes différents.

  Déterminer les coordonnées de A.
  Calculer les coordonnées de A.
  Donner les coordonnées de A.
  Quelles sont les coordonnées de A ?

- Quelles sont les consignes qui conviennent ? Barrer les autres. Eventuellement trouver d'autres consignes.

$2x - 5x = -3x$ $x\sqrt{2} - 5x = x(\sqrt{2} - 5)$	*Factoriser* *Développer* *Simplifier* *Regrouper* *Effectuer* *Calculer* *Réduire* *Résoudre*
$\dfrac{9 \times 2a}{9 \times b} = \dfrac{2a}{b}$	*Simplifier* *Diviser par un même nombre* *Supprimer un facteur*

Une autre rupture importante est de ne plus traduire en français une formule.
Enoncé des formules d'aire ou de volume.
Théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Marcel Pagnol, dans le temps des amours, évoque avec nostalgie le temps où « la muse venait en aide à la science ».

La circonférence est fière d'être égale à 2π R.
Et le cercle tout joyeux d'être égal à π R^2.

Le volume de la sphère,
Quoi que l'on puisse faire,
Est égal à $4/3\pi$ R^3.
La sphère fût-elle de bois.

Ou bien

Le carré de l'hypoténuse,
Est égal, si je ne m'abuse,
A la somme des carrés,
Des deux autres côtés.

D'autres écritures changent de lecture selon le niveau ou selon le cadre dans lequel on travaille.
$3>0$ se lit : trois est plus grand que zéro ou trois est supérieur à zéro.
$x>0$ se lit x est supérieur à zéro mais cela devient plus souvent x est positif.
Comment ne pas voir là, la difficulté qu'ont les élèves de lire $-x>0$?

Certains élèves ont besoin et demandent (aide individualisée en seconde) de formuler différemment certaines formules.

$x^n \times x^p = x^{n+p}$ $\qquad$ $1 + 2 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

E- La linéarité

L'esprit humain va vers le plus simple et vers des formes particulières.
Un triangle est spontanément rectangle ou isocèle.
Un rectangle a des dimensions qui sont voisines des proportions du nombre d'or.
La linéarité des formules s'impose surtout après avoir longuement travaillé sur la proportionnalité.

Les situations tirées de la vie (hors de la classe) sont essentiellement des situations de proportionnalité : Prix, conversion en €, pourcentages, formules de Physique….

La classe de Mathématiques met en jeu des situations plus complexes.

Ce serait si simple si $(a + b)^2$ était égal à : $a^2 + b^2$
$\sqrt{a^2 + b^2}$ était égal à : $a + b$
$\sin(a + b)$ était égal à : $\sin a + \sin b$

Il faut garder ces difficultés présentes à l'esprit en permanence, mettre toujours en face d'une situation de proportionnalité une situation qui ne l'est pas.

« Exemples de non linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse,… ne sont pas linéaires » (Programme de 2^{nde} BO du 12/08/99)

« Fonctions de référence -Il est souvent utile aux élèves de revoir, à l'éclairage des propriétés de linéarité (l'image d'une somme est la somme des images ; l'image de *k* fois un nombre est *k* fois l'image du nombre), les pièges classiques que constituent la somme de deux carrés, de deux inverses. de deux racines ou encore $\sqrt{a^2 + b^2}$ » (commentaire des programmes de 2^{nde})

F- Ruptures dues au changement de professeur

Tous les enseignants n'ont pas pour un niveau d'enseignement donné, les mêmes niveaux de rigueur ni les mêmes niveaux d'exigence. Certains élèves sont déroutés, en changeant de professeur, ce qui était accepté une année ne l'est plus l'année suivante. Il semblerait préférable, au cours des années d'accepter de plus en plus de techniques différentes pour résoudre un même problème. Parfois c'est le contraire, certains d'entre nous imposent leur technique, profondément persuadés que c'est la meilleure et qu'ainsi ils vont aider les élèves.

- Quelle méthode privilégier dans les problèmes de proportionnalité ?

Le tableau, la recherche du coefficient (où faut-il l'écrire ?), le passage à l'unité, les produits en croix… ?

- Comment réduire une somme algébrique ?

En regroupant les positifs et les négatifs, ou en réduisant de gauche à droite.

Accepte-t-on : $A = 2x - 3 + 7x - 8$
$A = 9x - 11$

ou veut-on $A = 2x - 3 + 7x - 8$
$A = (2x + 7x) + (-3-8)$
$A = 9x + (-11)$
$A = 9x - 11$

- Comment rédiger la résolution d'une équation ?

$3x+2=7$ $3x=5$ $x=\frac{5}{3}$	$3x+2=7$ $3x=7-2$ $3x=5$ $x=\frac{1}{3}\times 5$ $x=\frac{5}{3}$	Faut-il justifier chaque changement d'écriture ? A partir de quelle classe peut-on s'en dispenser ?

Il nous semble important d'accepter une part de calcul mental dans les changements d'écriture, cette part devenant pour certains élèves de plus en plus importante au cours des années. Veillons à ne pas freiner les capacités mathématiques de certains d'entre eux.

D'autres différences dans nos comportements peuvent gêner nos élèves.

Le déroulement d'une séance n'est pas le même chez tous les professeurs :

Cours, quasiment ou presque écrit au tableau, dicté, avec prise de notes..

Correction d'exercices, au tableau par un élève, au tableau par le professeur, oralement, photocopié, pas de correction….

L'organisation du travail est souvent différente :

Temps de recherche en classe important, recherche individuelle ou en groupe,

enseignant ressource la plupart du temps silencieux, enseignant déroulant des modèles d'exercices corrigés au tableau après un faux temps de recherche, contrôles avec reprise ou non des connaissances antérieure, beaucoup d'exercices d'entraînement ou non, des devoirs de recherche ou non, des exigences de rédaction ou pas….

Le rythme du travail personnel demandé aux élèves n'est pas toujours le même sur un niveau de classe.

Nous ne donnons pas tous les mêmes facilités aux élèves pour s'exprimer, pour qu'ils nous disent qu'ils n'ont pas utilisé nos techniques l'année précédente, qu'ils ont oublié, qu'ils ne savent plus. Il nous semble important de faire émerger leurs représentations.

Le contact direct avec un élève permet de lui faire exprimer, à propos de son attitude en classe que :

« Je sais que je devrais le savoir.

Je ne le sais pas. (Donc je suis en tort).

Donc je ne demande pas. »

IV) CONCLUSION

Après avoir mis en évidence un certain nombre de ruptures d'origine mathématique, dues à la rédaction des programmes ou dues à notre comportement, il faut aussi signaler un certain nombre de **continuités**.

Les nouveaux programmes, de la sixième à la seconde, présentent de notables améliorations dans la continuité de l'enseignement. Les ruptures que nous avons relevées sont dues pour l'essentiel à une lecture des programmes parcellaire. Analyser l'évolution d'une même tâche au cours des années ne peut que nous aider à gommer au maximum les effets de seuil.
Rappelons que pour bien enseigner au niveau n, il faut impérativement connaître au minimum les niveaux n-1 et n-2… et aussi n+1, n+2…
Tout professeur de $3^{ème}$ devrait connaître les programmes complets du collège et au moins ceux de 2^{nde}.
Tout professeur de 2^{nde} devrait connaître le programme de $3^{ème}$, le tableau synoptique des programmes de collège et les particularités des programmes des différentes sections des classe de $1^{ère}$ et terminales, présentes au moins dans son établissement.
Une concertation effective de tous les professeurs de mathématique d'un même établissement, sans imposer à tous les mêmes méthodes pédagogiques, est un moyen sûr d'aider nos élèves. Apprenons à accepter d'autres méthodes, à ne pas pénaliser les élèves qui les utilisent consciemment.

Nous avons relevé un certain nombre de tâches et de techniques qui à un niveau donné préparent aux niveaux suivants.

- Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$

Ce travail, initié en $3^{ème}$, permet de séparer l'écriture d'un nombre en partie rationnelle plus partie irrationnelle. La question de la rationalité du nombre composé ne se pose pas. Ce type d'écriture prépare à l'écriture des complexes en terminale S.

- Rendre un dénominateur rationnel

Le travail peut être amorcé en 2^{nd} sur des écritures de la forme $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, il prépare à :

  - la comparaison des nombres
  - la recherche de limites (lever des indéterminations)
  - la simplification de l'écriture des complexes

- L'arithmétique

Le travail sur les nombres entiers commence à prendre du sens dès la $3^{ème}$.

  - *Démontrer que la différence des deux carrés de deux entiers consécutifs n'est jamais un multiple de deux.*

    $(n+1)^2-n^2=2n+1$ qui est impair. Comment s'écrit un nombre impair ?

- *Démontrer que la somme des premiers nombres impairs est le carré d'un entier.*

  $1+3+\mathbf{5}+7+9=25=\mathbf{5^2}$, on peut faire d'autres conjectures.
  On peut ensuite utiliser la méthode classique :

  $$\begin{array}{r} 1+\quad 3+\quad 5+\qquad\qquad +1999 \\ +1999+1997+1995+\qquad\qquad +\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

  Reste à compter le nombre de termes.
  Une méthode valable pour 1999 est-elle valable pour n ?

- *En ajoutant 1 au produit de quatre entiers consécutifs obtient-on le carré d'un entier ?*

- *On peut faire des conjectures dès la classe de $3^{ème}$.*
  $1\times2\times3\times4+1=25=5^2$; $2\times3\times4\times5+1=121=11^2$; $3\times4\times5\times6+1=361=18^2$; $4\times5\times6\times7+1=841=29^2$
  Ce même problème peut être traité au lycée dans le cas général.
  Le choix d'appeler n le premier nombre donne
  $n^4+6n^3+11n^2+6n+1=(\quad)^2$?
  Le choix d'appeler n le deuxième nombre donne
  $n^4+2n^3-n^2-2n+1=(\quad)^2$?
  Le choix d'appeler x le nombre décimal moyen donne
  $x^4-5/2x^2+25/16$
  Cette dernière expression est factorisable avec de l'aide, mais surtout elle impose, après être sorti de l'ensemble des entiers, de vérifier que la solution est bien entière.

La recherche de problèmes numériques permet de passer des conjectures à la preuve. Des remarques faites sur les premiers nombres induisent souvent une idée pour apporter bâtir une démonstration dans le cas général.

- Ecritures fonctionnelles

  - *En $3^{ème}$: si $f(x) = (x - 3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$, quel est le meilleur choix pour $f(3)$, $f(0)$, $f(5)$?*
  - *En 2^{nde} : quel choix fait-on entre* $\mathrm{f(x)} = \frac{3x - 2}{x+1} = 3 - \frac{5}{x+1}$ *pour l'étude du sens de variations ?*
  - *En $1^{ère}$:* $\mathrm{f(x)} = \frac{3x^2 - x + 2}{x+1}$ *chercher a, b, c, tels que* $\mathrm{f(x)} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

- Valeurs approchées
  - *Soit a=1+x et* $b = \dfrac{1}{1-x}$*. Comparer les valeurs exactes puis approchées de a et de b pour x= 0,1 0,01 0,001 …etc.*
  - *Au lycée on peut, à partir de cet exercice de collège, faire chercher des écritures approchées de* $\dfrac{1}{1-x}$ *ou de* $\dfrac{1}{1+x}$ *pour des valeurs de x voisines de 0.*

Pour terminer, nous ajouterons que la réflexion que nous avons menée sur trois années nous a permis de modifier certaines de nos attitudes, certaines de nos pratiques de classe.

- Nous avons affiné le vocabulaire des consignes.
- Nous insistons sur la distinction entre le nombre et ses différentes écritures, notamment au collège.
- Nous insistons sur le choix de l'écriture la mieux adaptée au problème à résoudre.

  La simplification d'une fraction doit être justifiée par son utilité.

  Par exemple, en probabilités, $\frac{28}{100} = 0{,}28$ est plus performant que $\frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

  L'écriture $4\sqrt{2}$ n'est pas systématiquement meilleure que $\sqrt{32}$, la première étant utile pour réduire $\sqrt{32} + \sqrt{50}$, la seconde reste à privilégier dans des problèmes de calculs de longueurs et d'utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore.
- *Nous avons relu les programmes avec une autre approche.*
- *Nous sommes devenus attentifs à faire identifier les tâches et techniques associées.*
- *Nous signalons parfois que des problèmes seront résolus autrement les années ultérieures.*
- *Nous essayons de signaler systématiquement les points de rupture ou de continuité en classe.*
- *Nous n'avons pas limité ces pratiques à la partie numérique des programmes, bien sûr.*
- *Nous diversifions nos énoncés, en français, avec une formule, avec des exemples.*

  Pour l'aire du rectangle :

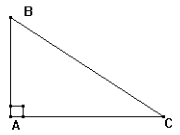
  En français, « l'aire du rectangle est égale au produit de ses deux dimensions »

  $A = L \times l$

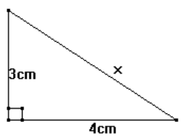
  $\boxed{5cm}$ $3cm$ $A = 5 \times 3 = 15\ cm^2$

  Pour le théorème de Pythagore :

  Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés



$BC^2 = AB^2 + AC^2$



$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$x = 5\ cm$

- *Nous signalons clairement nos objectifs, nos exigences personnelles, les différences connues ou non avec nos collègues et nous essayons de les expliquer.*
- *Nous évoluons pour faire « parler nos élèves ». Il est important de faire émerger les représentations qu'ils ont d'une notion. La réussite de l'aide individualisée en 2^nde^ passe par là.*
- *En reprenant l'idée d'un Inspecteur Général,*

  Nous essayons de « Passer des difficultés repérées par les professeurs aux difficultés dites et gérées par les élèves ».

III QUELQUES ACTIVITES

A- signe du produit en 4ème

- *(-2) × (-3) est généralement justifié par l'affichage de la calculatrice.*

On peut justifier le résultat en généralisant au produit de deux négatifs les règles de calcul définies pour les positifs (on ne change pas des règles connues qui fonctionnent). Cette " règle de cohérence " permet d'aborder les règles du calcul algébrique et de faire de petits raisonnements sur les nombres.

$2 \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$ avec des entiers et les règles d'addition

$(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = [\ (-2) + 2\ ] \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$

distributivité et produit par 0 sont généralisés

$(-2) \times (-3)$ et $2 \times (-3)$ sont deux nombres opposés, si l'un s'écrit -6, l'autre doit s'écrire +6

On peut donc justifier, pour des cohérences de calcul que :

$(-2) \times (-3) = 6$

On peut généraliser à un entier et un décimal, un entier et un rationnel, il faut faire admettre pour des raisons de « cohérence » qu'on définit la même règle Quels que soient les nombres utilisés.

- *(-a) × (-b) n'est que très rarement justifié*, souvent il est présenté comme la généralisation du résultat précédent, alors qu'il n'en est rien. Si on donne des valeurs numériques à a et b on obtient des écritures qui méritent que l'on s'y attarde.

- $a \times (-b) + a \times b = a \times [\ (-b) + b\ ] = a \times 0 = 0$

b et -b sont opposés et produit par 0

$a \times (-b)$ et $a \times b$ sont opposés donc on écrit : $a \times (-b) = —\ ab$

Une présentation analogue à celle ci dessus permet d'écrire : $(-a) \times (-b) = a \times b$

On peut ainsi montrer une continuité dans les techniques. Il y a aussi continuité dans les écritures. Prend-on le temps de montrer aux élèves ce qu'il y a derrière.

On donne la règle du produit sous la forme : $a \times (-b) = (-a) \times b = -\ ab$

		a × (-b)	**(-a) × b**	**- (a × b)**
a = 2	b = 3	2 × (-3) = -6	(-2) × 3 = -6	- (2 × 3) = -6
a = 2	b = -3	2 × (3) = 6	(-2) × (-3) = 6	- (2 × (-3)) = -(-6) = 6
a = -2	b = 3	(-2) × (-3) = 6	2 × 3 = 6	- ((-2) × (3)) = -(-6) = 6
a = -2	b = -3	(-2) × 3 = -6	2 × (-3) = -6	- ((-2) × (-3)) = - (+6) = - 6

On prend parfois le temps de détailler la règle des signes pour le quotient, rarement pour le produit.

En seconde, certains élèves ont des difficultés à comprendre que :

$-2\ (\ x + 3\ )\ (\ x - 5\ ) = 2\ (\ -x - 3\ )\ (\ x - 5\ ) = 2\ (\ x + 3\ )\ (\ - x + 5\ )$

Le tableau ci dessus présenté en 4ème ou en aide individualisée en 2nde peut les aider.

Il ne faut pas oublier non plus de faire le lien entre des règles apprises en $5^{ème}$ et des règles apprises en $4^{ème}$, montrer que pour certains calculs, on dispose de plusieurs techniques. On peut alors évaluer la pertinence de chacune. Des techniques différentes peuvent convaincre davantage d'élèves de la validité d'un résultat. La mémorisation en sera améliorée.

Par exemple :
Prendre l'opposé d'une somme revient à multiplier cette somme par -1.
Des exemples numériques sont hors de propos en occultant la signification des parenthèses.
Seules des écritures littérales, qui ne sont pas des généralisations, se justifient.

a - (b + c) = a + opposé de (b + c)
= a + opp de (a) + opp de (b)
= a + (- b) + (- c)
= a - b - c

a + (- 1) (b + c) = a + ((- 1) b + (- 1) c)
= a + ((- b) + (- c))
= a - b - c

Quelques exercices :

- *- 3 - 8 = 11* *Expliquer l'erreur.*

- *Trouver tous les couples (x,y) tels que :*
  1) xy = 12 ; *2) xy = - 12.*

- *Trouver l'intrus :*
  $-4 \times (6+5)$ $-4 \times 6 + (-4) \times 5$ $-4 + 5 \times (-8)$
  $-2 \times (-11) \times 2$ $4 \times (-5-5) - 4$

- *Pour $x \neq 0$, que peu-on dire des phrases suivantes :*
  $-3 \times x$ est toujours négatif.
  $(-3) \times x \times (-3)$ est toujours négatif.
  $x \times x$ est toujours du signe de x.

- *Calculer $A(x) = -5(x-3)$ et $B(x) = 5(-x+3)$ pour différentes valeurs de x. remarques, justifications.*

B- Signe d'une puissance

Proposition de présentation en 4ème

	Puissances de 10			**Puiss. de 2**			**Puiss. de -2**			**Puiss. de 3**			**Puiss. de -3**		
Exp	Ecrit puiss	écrit déci	écrit fract	écrit puis	écrit déci	écrit frac	écrit puis	écrit déci	écrit frac	écrit puis	écrit déci	écrit frac	écrit puis	écrit déci	écrit frac
4															
3															
2	10^2	100													
1															
0															
-1															
-2	10^{-2}	0,01	$\frac{1}{100}$												
-3															
-4															

Remplir le tableau.
Noter les alternances de signes. Où, pourquoi ?
Où apparaissent les écritures fractionnaires ?
Donner " toutes " les écritures de : 8 ; -8 ; 16 ; -16 ; 27 ; -27.
En utilisant puissance, produit de deux puissances, puissances de puissances, y compris avec des nombres négatifs.

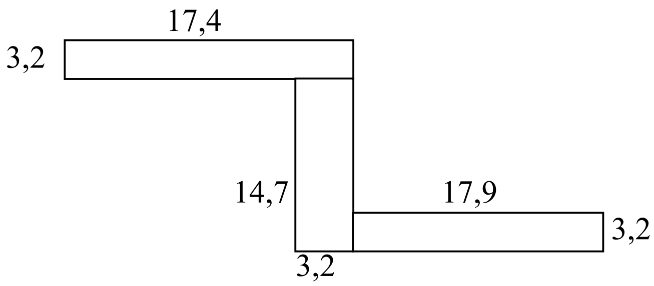
C- La distributivité au collège. Changement de cadre.

	TYPE DE TACHES	TECHNIQUES	SAVOIRS
6ème	• Division Euclidienne • Périmètredu rectangle • Calcul mental : multiplier par 9 ou par 11	Ex : 6x7 < 47 < 6x(7+1) Choisir entre 2l+2L et 2(l+L) Ex : 27x9 = 270 - 27	
5ème	• Calculer l'aire latérale d'un prisme droit • Calcul d'aires de figures « circulaires » • Calcul mental (6ème) • Résoudre des équations • Tester des égalités • Utilisation des échelles calcul d'un périmètre	Face par face ou développement Ex : aire d'une couronne Choisir la bonne écriture pour faire une économie de calculs	Patrons k(a+b+c+...) $A=\pi r^2$ $\pi a^2 -\pi b^2=....$ k(a+b) et k(a-b) Identités dans les 2 sens Consolider les identités k(a+b+c...)
4ème	• Familiarisation à l'usage des priorités et à la gestion de programmes de calcul • Réduire des écritures Calcul mental machine • Encadrer un nombre décimal par 2 décimaux de rang donné • Résoudre des équations • Faire fonctionner des situations de proportionnalité	Différence entre k(a+b) et ka+b Développer, ordonner, réduire..2x-5x= -3x 102x101 786548x125987= (786000+548)(125000+987) 2,74<2,74598<2,75 $274\text{x}10^{-2}$ <...<$(274+1)\text{x}10^{-2}$ Enigmes : choisir un nombre. (2x+9+x)/3-3=x a | b | a+b ka | kb | k(a+b)=ka+kb	Règles de priorité Ecritures simplifiées ak-bk=(a-b)k (a+b)(c+d) Numération décimale Numération Relation d'ordre ak+bk=(a+b)k k(a+b)=ka+kb Propriétes de la proportionnalité

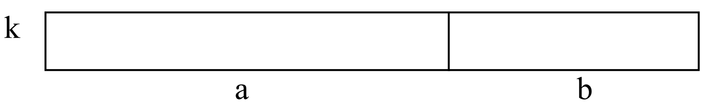
	TYPES DE TACHES	TECHNIQUES	SAVOIRS
$3^{ème}$	Factoriser $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ $(x+5)^2 -4$	Ecrire : $ab-5b$ $a^2 -4$	Les 3 identités
	Réductions d'écritures contenant des √	$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ $(1+\sqrt{2})^{2}= 3+2\sqrt{2}$ $1/(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} -1$	Les 3 identités les règles sur √
	Résoudre des systèmes	$2x+3y=7$ $5x-4y=12$ entraine : $5(7-3y)/2 - 4y =12$	Distributivité
	Construire un tableau de valeur d'une application linéaire	$f(2+3) =f(2) + f(3)$ Rôle de la parenthèse	Fonction linéaire
	Calculs d'aires et de volumes	Réunion de solides particuliers	Formules k(a+b+...)=..

I) Cadre géométrique

Calculer l'aire de la figure donnée, puis réassembler les parties pour former un rectangle et calculer son aire.

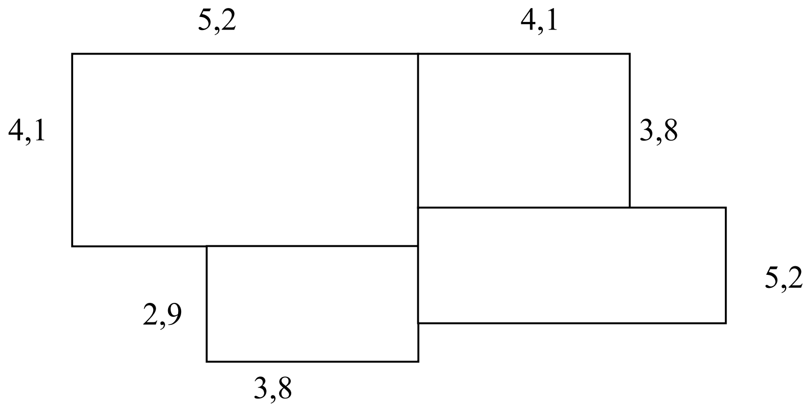


Faire constater que : $3{,}2 \times 17{,}4 + 3{,}2 \times 14{,}7 + 3{,}2 \times 17{,}9 = 3{,}2 \times 50$



k (a + b) = ka + kb

Calculer l’aire de la figure donnée, puis réassembler les parties pour former un rectangle et calculer son aire.



Faire constater que : $5{,}2 \times 4{,}1 + 4{,}1 \times 3{,}8 + 2{,}9 \times 3{,}8 + 5{,}2 \times 2{,}9 = 9 \times 7$

	a	b
c	**ac**	**bc**
d	**ad**	**bd**

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

II) Cadre littéral

On fait intervenir la simple distributivité

$(a + b)(c + d) = k(c + d) = kc + kd = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$

III) Cadre numérique

On analyse le produit : 57×43. On pose l’opération en colonnes sans utiliser les retenues.

```
    5 7
  × 4 3
  -----
    2 1
  1 5 0
  2 8 0
2 0 0 0
-------
2 4 5 1
```

En redonnant son sens à la numération décimale :

$(50 + 7)\times(40 + 3) = 50\times40 + 50\times3 + 7\times40 + 7\times3$
$= 2000 + 150 + 280 + 21$

Poser une multiplication, c’est transformer un produit en somme !

IV) Passage du numérique à l'algébrique :

$$\begin{array}{rr} & 31 \\ \times & 32 \\ \hline & 2 \\ & 60 \\ & 30 \\ & 900 \\ \hline & 992 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & x+1 \\ \times & x+2 \\ \hline & 2 \\ & 2x \\ & x \\ & x^2 \\ \hline & x^2+3x+2 \end{array}$$

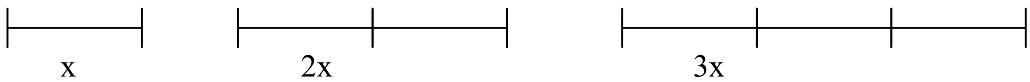
On teste l'égalité $(x + 1) (x + 2) = x^2 + 3x + 2$ pour $x = 30$

Cette présentation s'appuie sur le produit de deux polynômes, elle n'est pas généralisable en l'état.
Elle insiste fortement sur la transformation d'un produit en une somme.
De même que : « on n'ajoute des dizaines qu'avec des dizaines pour obtenir des dizaines »,
« on n'ajoute des x qu'avec des x pour obtenir des x »……
La présentation d'un produit en colonnes incite moins à réduire $x^2 + 3x$.
On peut alors passer au développement de $(a + b) (c + d)$ en se posant la question de la place de chaque produit partiel. Peut-on les réduire ou non ? On peut alors revenir au cadre géométrique pour justifier.

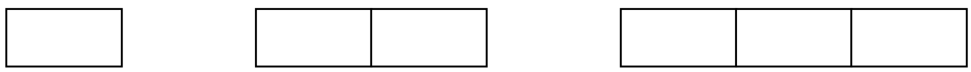
V) Retour au cadre géométrique pour la réduction de certaines écritures

$x + 2x = 3x$

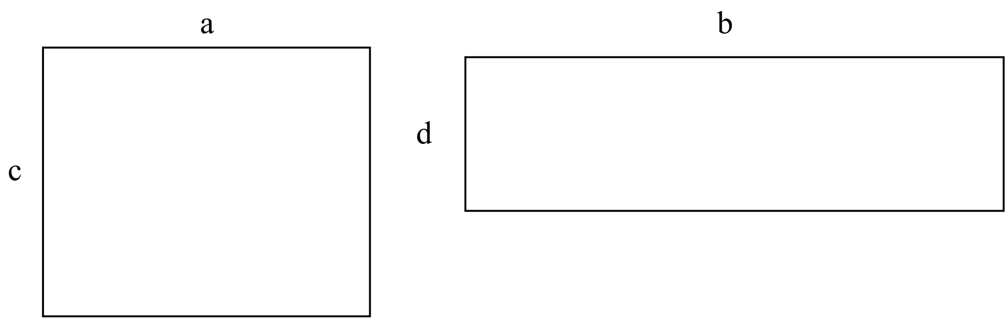
Si x représente une longueur.



Si on utilise : $x = 1x$, et des rectangles de dimensions x sur 1, x sur 2, x sur 3.



Des rectangles ne peuvent s'associer en rectangles que s'ils ont une dimension commune.



Les deux rectangles ne peuvent s'assembler que si
$a = b$ ou $a = d$ ou $c = b$ ou $c = d$.

On ne peut réduire $ac + bd$ que dans des cas très particuliers.

D- Des changements de cadre pour résoudre un problème

Texte du problème :

Angèle, la fermière, va au marché avec un gros panier rempli d'œufs.
Légèrement maladroite, elle commence par casser le cinquième des œufs contenus dans son panier. Puis elle vend le tiers des œufs que contenait le panier avant la casse. Les affaires n'étant pas bonnes, Angèle décide de donner le septième des œufs qui lui restent et repart alors chez elle avec 48 œufs dans son panier.
Combien Angèle avait-elle d'œufs en allant au marché ?

□

Ce problème a été proposé en stage à des professeurs de collège.
Première consigne : Résoudre le problème.

Une très forte majorité a posé une équation, soit directement, soit en faisant quelques calculs intermédiaires pour en simplifier l'écriture.

Deuxième consigne : Poser ce problème en $5^{\text{ème}}$ ou en $4^{\text{ème}}$.

Quelques-uns uns proposent alors un dessin comme seule technique possible.

Ce même problème a été posé dans des classes de la $5^{\text{ème}}$ à la 2^{nde}
On obtient peu de réponses, 1 à 3 par classe.
En $5^{\text{ème}}$ certains essaient 1/3+1/5 mais abandonnent
En $3^{\text{ème}}$ 1/5x+1/3x ou x/5+x/3 bloquent une forte proportion de ceux qui essaient de poser l'équation.
Bien sûr on trouve 48+1/3, x-1/5, La fraction n'est pas reconnue comme fraction d'une grandeur.
Peu de dessins, des tentatives avec des segments, de rares tentatives avec un disque

□

Les professeurs interrogés, reconnaissent que pour eux, la fraction est implicitement « fraction de … » et non un nombre rationnel. L'énoncé nous y invite fortement

Que se passe-t-il pour les élèves ?
Si on regarde les programmes, jusqu'en $5^{\text{ème}}$ on privilégie « fraction de … ». Quelques exercices d'entraînement portent sur des fractions non reliées à des grandeurs.
Ce n'est qu'en $4^{\text{ème}}$ que la mise en place des quatre opérations fait prédominer l'idée de nombre. Sans le dire aux élèves nous mettons en place la structure de corps totalement ordonné sur les rationnels

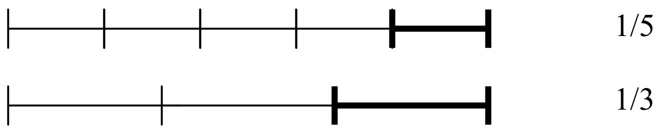
□

Quelques techniques de résolution :

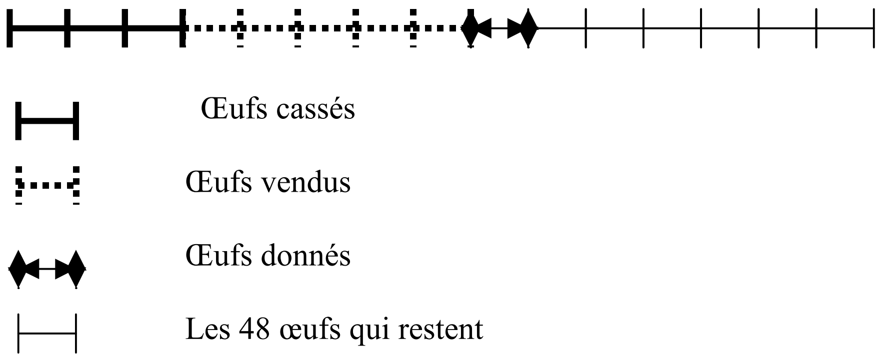
Avec un dessin –1

Reprenons le problème en insistant sur « fraction de …. » pour donner du sens aux fractions.

Un premier type de dessin peut être celui ci :

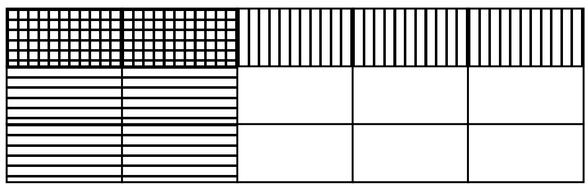


Si on souhaite continuer à travailler avec des segments, une petite difficulté en 5$^{\text{ème}}$ consiste à faire comprendre que pour partager le même segment en 3 puis en 5, un segment de 15 unités est bien commode.



Avec un dessin -2

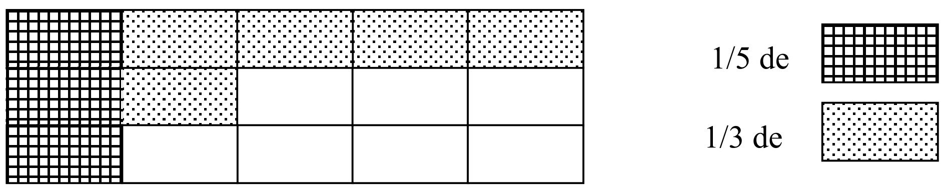
En s’inspirant de la justification donnée lors de la multiplication de deux fractions, et
« en donnant de l’épaisseur au segment » :



1/3 x 2/5 = 2/15

On peut proposer le dessin suivant :

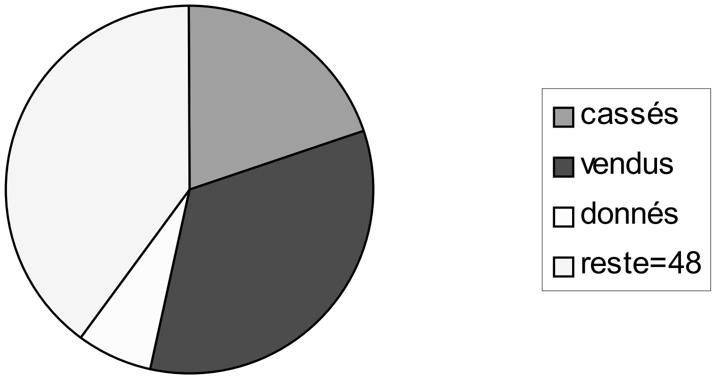
…



La somme apparaît comme 8/15 de…
Il reste *évidemment* 7/15 de…
1/7 de ce reste est aussi *évidemment* 1/15 de….
Les six cases restantes représentant 48 œufs, la solution apparaît *rapidement*
Avec un dessin -3

Si on souhaite faire un dessin, pourquoi ne pas réinvestir les graphiques circulaires.
Il suffit de calculer les angles correspondants à chaque qualité d’œuf.
1/5 de 360° c’est 72°

1/3 de 360° c'est 120°
Soit un total de 192°
Il reste alors 168°
1/7 de 168° c'est 24°
Il reste 144° qui représentent 48 œufs.



…………
En utilisant le langage

Si on casse le 1/5 des œufs, il en reste 4/5. Ceci est facile à comprendre pour un élève de $5^{\text{ème}}$, alors que poser l'opération 1-1/5 reste un exercice souvent difficile.
La seule difficulté du problème sera de faire calculer 4/5 –1/3, un recours au dessin est peut-être nécessaire.
Dès que l'on a trouvé qu'il restait 7/15 du panier, 1/7 de 7/15 ne doit plus poser de problème.
Il reste alors les 6/15 du panier qui représentent 48 œufs, donc 1/15 du panier représente 8 œufs et le panier complet contenait 8x15= 120 œufs.

<u>Une solution donnée par une élève de $3^{\text{ème}}$:</u>

$$100 \xrightarrow[-20]{-1/5 \text{ de } 100} 80 \xrightarrow[-33]{-1/3 \text{ de } 100} 47 \xrightarrow[-6,7]{-1/7 \text{ de } 47} 41,3$$

$$100 \xrightarrow{:\ 2,42} 41,3$$

$$116,16 \xleftarrow{\text{x } 2,42} 48$$

Angèle avait *environ* 116 œufs.

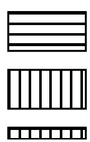
Remarque : Le problème a été posé en classe juste après le chapitre sur grandeurs, pourcentages, fonctions linéaires (première approche).
Il ne lui restait plus qu'à ajuster la valeur de départ pour ne pas avoir de nombres non entiers.
Elle pouvait aussi procéder par essais rectifications à partir de 116.

<u>Enfin la technique de la mise en équation :</u>

La technique mettant en jeu des fonctions linéaires peut permettre de décomposer le travail.

$$x \xrightarrow{-\ 1/5 \text{ de } x} 4/5\ x \xrightarrow{-\ 1/3 \text{ de } x} 4/5x-1/3x \xrightarrow{-\ 1/7 \text{ du reste}} 6/7(4/5x-1/3x\ ) = 48$$

$$4/5x-1/3x \downarrow 45$$



obligation de réduire
pour continuer

Au lieu de partir de 15 segments ou rectangles, au lieu de partir de 360°, au lieu de partir de 100, pourquoi ne pas partir d'une grandeur x ?

Ecrire un nombre x c'est alors pouvoir lui donner des valeurs qui évitent de se poser des questions sur la validité des différentes écritures 1/5x, 1/3x, 1/7 ( ).

On peut alors mettre en valeur la méthode algébrique en donnant d'autres valeurs aux variables didactiques du problème : changer 1/5 ou 1/3 ou 1/7 ou 48.
Le problème conserve-t-il du sens ? Peut-on le résoudre avec n'importe quelles valeurs ?

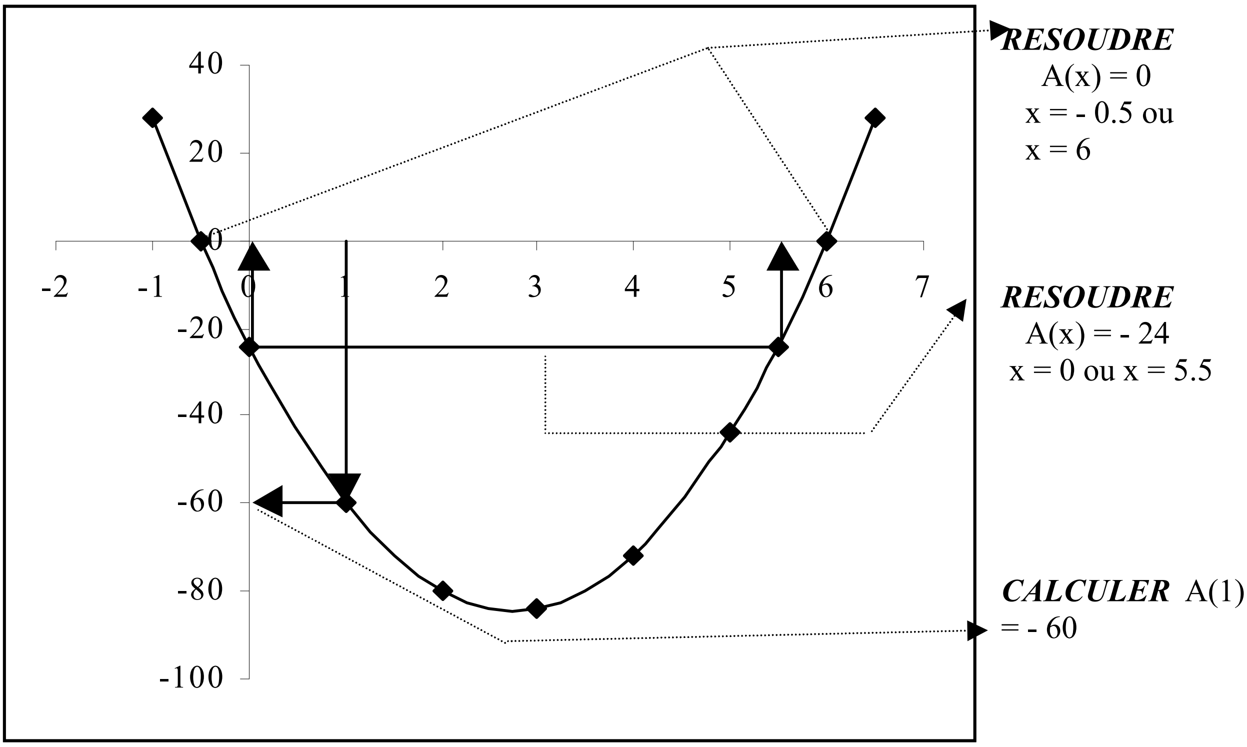
E-Types de tâches, calcul numérique et algébrique en 3ème

Ce document a été élaboré avec une classe de 3ème, fin du premier trimestre.
Il répondait à la question d'un élève qui : « ne comprenait plus pourquoi, parfois on donnait x = 2 dans un problème puis pourquoi dans une autre question, on demandait de trouver x »
Il s'agissait de clarifier avec la classe les différentes questions couramment posées et les techniques à mettre en œuvre pour y répondre. Les différents cadres ont aussi été envisagés.

DEVELOPPER	$A(x) = (3x-5)^2-(x+7)^2$	***FACTORISER***
A(x)= A(x)= A(x)= $A(x)= 8x^2 -44x -24$	***DEVELOPPER – VERIFIER***	A(x)= A(x)= A(x)= $A(x)= (4x+2)(2x-12)$
CALCULER A(1)= A(1)= 8 - 44 - 24 A(1)= $\boxed{-60}$	***CALCULER*** A(1)= A(1)= 4 - 64 A(1)= $\boxed{-60}$	***CALCULER*** A(1)= A(1)= (6) (- 10) A(1)= $\boxed{-60}$
	VERIFIER - TESTER	
RESOUDRE A(x) = **—24** x (8x - 44) = 0 Les solutions sont 0 et 5,5	***RESOUDRE***	***RESOUDRE*** A(x) = **0** (4x+2)(2x-12) = 0 Les solutions sont — 0,5 et 6

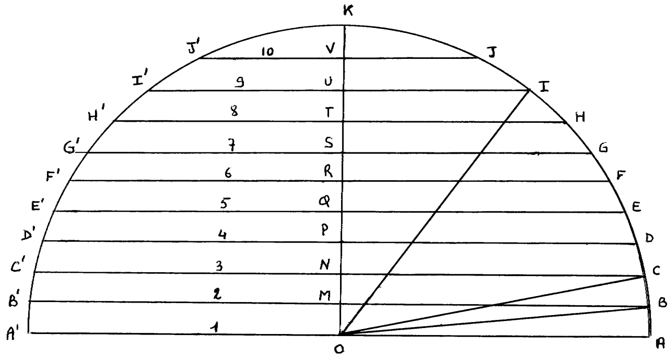
GRAPHIQUEMENT

x	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	5,5	6	6,5
A(x)	28	0	-24	-60	-80	-84	-72	-44	-24	0	28



F – Calcul d'aires et tableur – approche du nombre π

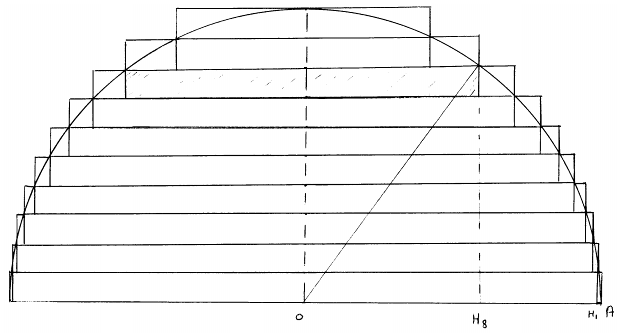
Document pour le professeur



Cette figure est proposée aux élèves.
On leur propose de calculer une valeur approchée de l'aire du demi disque puis du disque.

Deux choix possibles :

1) On encadre le demi disque par deux séries de rectangles.



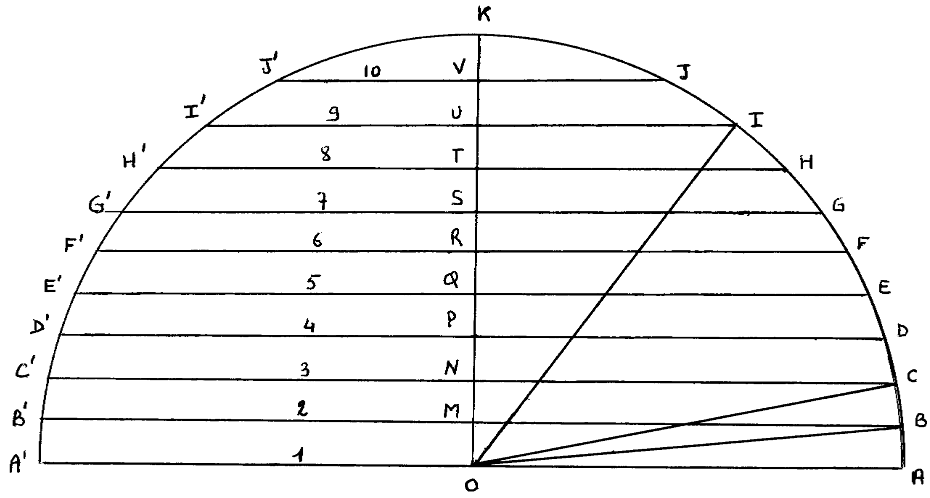
2) On assimile chaque tranche à un trapéze.
On perd la possibilité d'avoir un encadrement du résultat.

Parties du programme mises en jeu :

1) **Utilisation du théorème de Pythagore.**
2) **Ecriture de nombres avec le symbole √ .**
3) **A partir de 3 calculs écrits, prévoir l'écriture des 6 autres résultats.**
Choix d'une écriture performante :
$\sqrt{10^2-1^2}$, $\sqrt{10^2-2^2}$, $\sqrt{10^2-8^2}$ **au lieu de** $\sqrt{99}$, $\sqrt{96}$, **6**
4) **Utilisation des calculettes (emploi de la mémoire additive).**
5) **Notion d'algorithme et de programmation. Le point 3) permettra de comprendre la façon de remplir les cellules du tableur. Constantes et variables.**
6) **Approche du nombre π.**

Fiche élève

AIRE D'UN DISQUE DE 10 cm DE RAYON
Coupé en tranches de 1 cm



Objectif : Calculer une valeur approchée de l'aire d'un disque, en assimilant chaque tranche à un trapèze.

1) Refaire le dessin avec les bonnes dimensions.
2) Calculer MB. En déduire BB'.
3) Calculer NC. En déduire CC'.
4) Calculer UI. En déduire II'.'
5) En déduire la valeur exacte puis une valeur décimale approchée de chacune des bases des trapèzes.
6) Compléter le tableau

N° du trapèze	Grande base	Petite base	Aire (exacte)	Aire (approchée)
1	2x10	2x$\sqrt{99}$	10+$\sqrt{99}$	19.94987437
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
			Aire du demi disque =	
			Aire du disque =	

Quelques résultats

Contenu des cellules : Formules

Nombre	1000				
Epaisseu	=10/B				
N° de la	Gd ba	Pt base	Aire	Airex2	Aire cumulée
1	=2*1(	=2*RACINE(100-(A5*$B$2)^2)	=(B5+C5)*$B$2/2	=D5*2	=E5
=A5+1	=C5	=2*RACINE(100-(A6*$B$2)^2)	=(B6+C6)*$B$2/2	=D6*2	=E6+F5
=A6+1	=C6	=2*RACINE(100-(A7*$B$2)^2)	=(B7+C7)*$B$2/2	=D7*2	=E7+F6
=A7+1	=C7	=2*RACINE(100-(A8*$B$2)^2)	=(B8+C8)*$B$2/2	=D8*2	=E8+F7

Les 10 premières lignes du tableur : affichage.

Nombre de tranches	1000				
Epaisseur	0,01				
N° de la tranche	Gd base	Pt base	Aire	Airex2	Aire cumulée
1	20	19,99999	0,1999999	0,3999999	0,3999999
2	19,99999	19,99996	0,1999997	0,3999995	0,7999994
3	19,99996	19,99991	0,1999993	0,3999987	1,1999981
4	19,99991	19,99984	0,1999987	0,3999975	1,5999956
5	19,99984	19,99975	0,1999979	0,3999959	1,9999915
6	19,99975	19,99964	0,1999969	0,3999939	2,3999854

Les 10 dernières lignes du tableur : affichage

991	2,8213472	2,6772374	0,0274929	0,0549858	313,83746
992	2,6772374	2,5247574	0,02601	0,0520199	313,88948
993	2,5247574	2,362287	0,0244352	0,0488704	313,93835
994	2,362287	2,1876014	0,0227494	0,0454989	313,983849
995	2,1876014	1,9974984	0,0209255	0,041851	314,0257
996	1,9974984	1,7870646	0,0189228	0,0378456	314,063546
997	1,7870646	1,548031	0,0166755	0,033351	314,096897
998	1,548031	1,2642785	0,0140615	0,0281231	314,12502
999	1,2642785	0,8942036	0,0107924	0,0215848	314,146605
1000	0,8942036	0	0,004471	0,008942	314,155547

Valeur approchée de 100π

G – Vers l'irrationnalité de $\sqrt{2}$

Cette série de sept devoirs à donner à chercher à la maison, propose de couvrir un partie du programme de calcul numérique, algébrique, fonctionnel de la classe de troisième.
Ce travail est à répartir sur l'année, en n'oubliant pas de faire, chaque fois que c'est possible le lien entre eux.

DEVOIR 1

Différentes écritures d'une fraction :

I) Vérifier que $\dfrac{525}{23} = 22 + \dfrac{19}{23}$

(22 est la partie entière de $\dfrac{525}{23}$, $\dfrac{19}{23}$ est sa partie fractionnaire).

Ecrire sous la forme partie entière plus partie fractionnaire :

$\dfrac{43}{13} ; \dfrac{653}{29} ; \dfrac{654}{37}$.

II) $\dfrac{525}{23} = 22 + \dfrac{19}{23}$; en remarquant que $\dfrac{19}{23} < 1$,

écrire $\dfrac{23}{19}$ = entier + partie fractionnaire.

Vérifier que : $\dfrac{525}{23} = 22 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{4}{19}}$.

Recommencer avec 4/19 et ainsi de suite…..

L'écriture obtenue est appelée " écriture développée en fraction continue".

III) Donner l'écriture développée en fraction continue de

$\dfrac{43}{13} ; \dfrac{653}{29} ; \dfrac{654}{37}$.

IV) Quelle est l'écriture développée en fraction continue de $\dfrac{1}{59}$?

V) Quelle est l'écriture fractionnaire de $5 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1}}}}$

DEVOIR 2

<u>Peut on définir un nombre par :</u> $r = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$?

I) Donner l'écriture sous forme de fraction irréductible de :

$r_1 = 1$; $r_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $r_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$;

$r_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$ $r_5 = \ldots\ldots$ ……… $r_8 =$.

II) Donner pour chacune des fractions précédentes une valeur approchée (Utiliser la calculatrice et choisir un nombre de chiffres après la virgule significatif). Que constate-t-on ?

III) Ranger dans l'ordre croissant les nombres $r_1 \ldots\ldots r_8$.

IV) En utilisant les résultats de la question I,vérifier que pour $1 < n \leq 8$ on a :

$$r_n = 1 + \frac{1}{1 + r_{n-1}}$$

V) Peut-on faire une hypothèse sur la place de r parmi les nombres $r_1 \ldots\ldots r_8$?

DEVOIR 3

<u>Utilisation de la calculatrice</u>

Avec une calculatrice on veut comparer les valeurs affichées de :

$$\frac{114243}{80782} \;;\; \frac{47321}{33461} \;;\; \sqrt{2}.$$

I) Démontrer que les deux fractions sont irréductibles.

II) En utilisant la calculatrice, peut-on affirmer que les fractions sont égales à $\sqrt{2}$?

III) Avec la calculatrice, afficher

$\frac{114243}{80782} - \frac{47321}{33461}$;

$(\frac{114243}{80782})^2$;

$(\frac{47321}{33461})^2$;

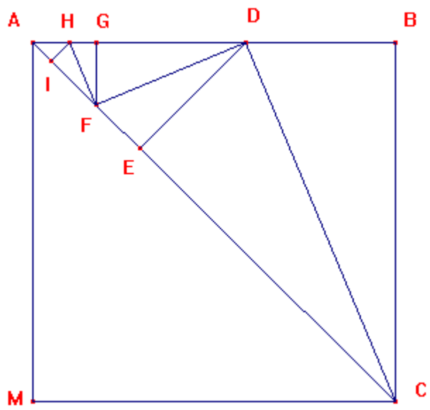
$114243^2 - 2 \times 80782^2$;

$47321^2 - 2 \times 33461^2$.

Conclusion ?

DEVOIR 4

Approche géométrique.



ABCM est un carré de 12 cm de côté, découpé dans une feuille de papier. On plie la feuille de sorte que [BC] vienne sur [AC]. B vient en E.
On recommence la même opération dans les triangles AED, AGF.

I) Que représente (CD) pour l'angle $\widehat{ACB}$? Quelle est la nature du triangle ADE ?
II) Mesurer [AC]. En donner une valeur approchée entière.
III) *Avec l'hypothèse AC = 17*, calculer AE puis ED puis DB puis AD puis ……puis AI et AH.
Quelle est la nature du dernier triangle obtenu ? Conclusion ?
IV) Reprendre le problème avec AB = 80782 et AC = 114243, puis avec AB = 47321 et AC = 33461. Faire le lien avec le devoir n° 3.
Quelles premières conjectures peut-on faire pour $\sqrt{2}$?

DEVOIR 5

Généralisation du devoir 4

I) En reprenant la figure du devoir précédent, et en posant AC = a et AB = b, démontrer que : AD = 2 b - a et AE = a - b.

II) Démontrer que : $b < a < 2b$
Si a et b sont des entiers positifs, justifier que : 2 b – a et a – b sont des entiers positifs.

III) Démontrer les inégalités suivantes :
$2b - a > 0$
$a - b > 0$
$2b - a < a$
$a - b < b$

Appliquer au triangle ADE les propriétés précédentes, et justifier que :
$$a - b < 2b - a < 2(a - b)$$

Que peut-on dire des deux suites de nombres obtenues dans les deux colonnes du tableau ?

Triangle	Hypoténuse	Côté
ABC	a	b
ADE	2b - a	a - b
AFG		
AIH		

IV) En déduire que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

DEVOIR 6

Résolution de systèmes d'équations

A partir de la même figure, en posant AC = a et AB = b,
Ecrire en fonction de a et b AE puis ED puis DB puis AD.
On passe d'un triangle rectangle isocèle ABC à un triangle rectangle isocèle AED de dimensions strictement inférieures.
On peut alors se poser le problème inverse :
Connaissant les dimensions de AED, peut-on calculer les dimensions de ABC, C'est à dire, peut-on agrandir la figure ?

I) Quelles devraient être les dimensions *supposées* de ABC pour que les dimensions *calculées* de AED soient 17 et 12 ?

II) Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - y = 17 \\ y - x = 12 \end{cases}$$

III) Dans une feuille de papier format A3 (copie double grand format) tracer un carré de côté 29 cm, mesurer sa diagonale. En donner une valeur approchée entière. Comparer avec les questions I) et II).

III) Reprendre la question I) avec 41 et 19.
Continuer et comparer avec le devoir 3

IV) Peut-on faire une hypothèse sur la valeur de r dans le devoir 2 ?

DEVOIR 7

Représentations graphiques

I) Reporter, dans un tableau puis sur un graphique, les valeurs obtenues dans le devoir 4 : (Choisir l'unité pour que le graphique tienne entièrement sur une copie grand format)

x	12	….	….	….
y	17	….	….	….

Les points sont-ils alignés ?

II) Reporter, dans un tableau puis sur un graphique, les valeurs obtenues dans le devoir 2. (Choisir l'unité pour que le graphique tienne entièrement sur une copie grand format)

x	408	169	….	….	….	….	….	….
y	577	239	….	….	….	….	….	….

Les points sont-ils alignés ?

III) Sur les graphiques précédents tracer la représentation graphique de la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{2}\,x$. Conclusions ?

H - MODULE : COMMENT FAIRE POUR EVITER DES ERREURS DE CALCUL : AUTOCONTROLES

Exercice 1 : soit $A(x) = (9 - 49x^2) + 4(7x - 3)(4x + 1) - (3 - 7x)^2$ *forme 1 de A*

1) Développer, réduire et ordonner A(x) : on obtient *la forme 2*.
2) Factoriser A(x) : on obtient la *forme 3.*
3) Résoudre les équations suivantes en utilisant la forme de A(x) la plus judicieuse :

- $A(x) = 0$
- $A(x) + 12 = 0$
- $A(x) = 9 - 49x^2$

4) Que proposez-vous pour vérifier l'exactitude de vos calculs pour les questions 1 et 2 puis pour la question 3.

Exercice 2 : Résoudre dans ℝ : $\sqrt{8} - 2x < \sqrt{2} + x$ $\qquad 3x - \pi x \geq 9 - \pi^2$

1) Donner l'ensemble des solutions.
2) Que proposez-vous de faire pour assurer un minimum d'autocontrôle ?

Exercice 3 : vous hésitez : doit-on écrire :

$\frac{4x}{5} - \frac{x-2}{10} = \frac{8x - x - 2}{10}$ ou $\frac{4x}{5} - \frac{x-2}{10} = \frac{8x - x + 2}{10}$? Comment éliminer la mauvaise réponse ?

Exercice 4 : peut-on simplifier $\frac{9 + 2a}{9 + b}$? Est-ce égal à $\frac{1 + 2a}{1 + b}$? à $\frac{2a}{b}$? à autre chose ?

Comment faire pour éviter d'écrire une bêtise ?

Exercice 5 : un élève écrit :

$(3x + 1) + (x + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -2$

Donc $S = \{-\frac{1}{3} ; -2\}$

Comment **rapidement** le convaincre de l'erreur commise ?

I – Fiche de diagnostic à l'entrée en seconde

NOM : **CLASSE :**

Entourer la bonne réponse

Expression	est égale à		
$2\times\frac{5}{3}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$
$\frac{2}{3}+\frac{7}{4}$	$\frac{14}{12}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{29}{12}$
$\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{8}{4}$
$\frac{3}{2}\times\frac{5}{7}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{14}$
$2^3\times 3^3$	$(2\times 3)^{3+3}$	$(2\times 3)^3$	$(2\times 3)^{3\times 3}$
$2^2\times 3^3$	$(2\times 3)^{2+3}$	$(2\times 3)^{2\times 3}$	$2^2\times 3^3$
$(2\times 3)^5$	$2^5\times 3^5$	2×3^5	$2^5\times 3$
$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\frac{2^5}{3^5}$	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{2}{3^5}$
$\frac{2^5}{2^3}$	1	$2^{5:3}$	2^{5-3}
$(3^4)^2$	3^{4+2}	$3^{4\text{x}2}$	3^{42}
$\sqrt{2}+\sqrt{5}$	$\sqrt{2+5}$	2 + 5	ne se simplifie pas
$\sqrt{5-3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$	$\sqrt{2\times 5}$	2×5	$\sqrt{2+5}$
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}$
$\sqrt{4^2}$	4^2	$\sqrt{4}$	4
$\sqrt{(-5)^2}$	n'existe pas	5	- 5
$\left(\sqrt{4}\right)^2$	4	16	$\sqrt{4}$
$\left(\sqrt{\pi-4}\right)^2$	$\pi-4$	n'existe pas	$4-\pi$

J – Module : Egalités vraies ou fausses

Trouver **des** réels a, b, c, d tels que, Selon les valeurs numériques prises par les lettres, les égalités sont vraies ou fausses.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$
$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$	$\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$
$(a+b)^2 = a^2+b^2$	$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$
$-a$ positif	$-a$ négatif
$a-b$ positif	$a-b$ négatif
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$	$\sqrt{ab} \neq \sqrt{a}\,\sqrt{b}$
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
$\frac{9+2a}{7+2a} = \frac{9}{7}$	$\frac{9+2a}{7+2a} \neq \frac{9}{7}$
$\frac{a+3}{a+3} = \frac{a}{a}$	$\frac{a+3}{a+3} \neq \frac{a}{a}$
$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{a^2} \neq a$
$0a = b$	$0a \neq b$
$2x+3=0$ et $x=-3-2$	$2x+3=0$ et $x\neq -3-2$
$\frac{9a+b}{2ab} = \frac{9a}{2a}$	$\frac{9a+b}{2ab} \neq \frac{9a}{2a}$
$\frac{9+2a}{9+b} = \frac{2a}{b}$	$\frac{9+2a}{9+b} \neq \frac{2a}{b}$
$\cos(ab) = \cos a \cos b$	$\cos(ab) \neq \cos a \cos b$
$\cos(a+b) = \cos a + \cos b$	$\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$
$\cos 2a = 2\cos a$	$\cos 2a \neq 2\cos a$
$\cos a = \cos b$ et $a = b$	$\cos a = \cos b$ et $a \neq b$
$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

GROUPE DE TRAVAIL STAGE INTER-ACADEMIQUE DE NANTES JANVIER 1997

Du numérique à l'algébrique.

Compte-rendu par G. VETTICOZ- complété par N MILHAUD.

Le passage du numérique à l'algébrique, quelles difficultés, quels obstacles, quelles problématiques? Quels types de problèmes les élèves doivent-ils être capable de résoudre dans ces domaines? Avec quelles techniques? Quel travail cela suppose-t-il (Orléans Toulouse) ?

Dans le cursus suivi par les élèves de l'école primaire au lycée l'apprentissage suit la progression : numérique —algébrique —fonctionnel.

L'analyse des difficultés rencontrées par les élèves dans chacun de ces passages. nécessite que l'on examine les analogies et les différences entre ces domaines, les zones de continuités et de ruptures que cela entraîne dans leur enseignement, qu'ils soient considérés comme objets d'étude ou comme outils de résolution de problèmes.

En quoi l'algébrique diffère-t-il du numérique ?

S'agit-il de calculs dans R avec des lettres ?, Est-ce le calcul formel que les élèves vont bientôt trouver dans leurs calculatrices les plus élémentaires ? Est-ce seulement une technique ?

Dans le domaine du numérique. les élèves doivent être capables de "faire des opérations" (techniques opératoires) et "de connaître le sens des opérations" c'est à dire de savoir résoudre des problèmes.

Faire des opérations, c'est, le plus couramment, appliquer des règles de calcul qui permettent de passer de l'écriture d'un nombre sous la forme additive, multiplicative (par exemple 4x5+8), à son écriture sous la forme canonique c'est à dire 28. C'est dire que l'expression 4x5+8 n'est pas considérée comme l'écriture d'un nombre, mais bien plus comme une opération à effectuer pour trouver un résultat.

Dans *la résolution des problèmes,* les exigences de nombreux professeurs concernant la rédaction de la solution sont un peu différentes, ils demandent le plus souvent "d'écrire les opérations qui permettent de voir comment il s'y est pris pour résoudre, avant de donner la réponse sous la forme canonique. On perçoit là, une demande de "modélisation" du problème.

Une analyse des cahiers de l'évaluation 6ème montre que lorsque les opérations sont «posées » en colonne les résultats sont majoritairement bons mais qu'il n'en est pas de même lorsque les opérations sont « posées en ligne ». Cela qui renforce l'idée qu'il y a confusion entre l'opération et l'expression ou l'écriture d'un nombre sous une forme ou une autre. L'usage des calculatrices dans le calcul numérique va d'ailleurs dans ce sens.

Dans le domaine de l'algèbre, *le travail technique* sur les expressions algébriques est essentiellement un travail de transformations, qui permet de passer d'une écriture à une autre. On passe de l'écriture (2x+3y-3x) à (3y-x) ou à 2x+3(y-x) selon la tâche qui est demandée. Quant à *l'activité de résolution de problèmes.* elle est au départ un travail de modélisation des situations étudiées.

À quoi sert l'algèbre?

Ne permet-elle pas de modéliser dus situations et «expliquer des résultats, est les généralisant?
On pense bien sûr à la modélisation des problèmes posés dans d'autres disciplines ou dans des situations de la vie courante Mais, il est moins courant, ou il n'est plus courant, d'envisager l'algèbre comme un moyen de modéliser d'autres domaines mathématiques, par exemple le numérique et plus particulièrement l'arithmétique.

Le système des nombres entiers offre à l'observation de nombreux phénomènes qui peuvent être modélisés algébriquement Fréquenté de longue date par les élèves. Il constitue pour eux une réalité familière à propos de laquelle il est possible de proposer des problèmes dont la résolution appelle la mise en œuvre et l'explicitation de formes élémentaires du calcul algébrique qui peut ainsi prendre de la signification.

Quelques exemples de conjectures que le calcul algébrique permet de prouver :
- *La somme de deux nombres impairs est un nombre pair*
- *La somme de deux impairs consécutifs est un multiple de 4.*
- *Si trois nombres entiers sont consécutifs. la différence entre le produit des extrêmes et le carré du moyen est égal à I.*

Le domaine d'étude des mesures et grandeurs offre un champ de problèmes tout à fait essentiel pour l'enseignement de l'algèbre.

Quelles difficultés dans le passage du numérique à l'algébrique?

Dans le domaine du numérique on calcule. et dans l'algébrique. on transforme. Cette différence entre les types de tâches qui sont demandées aux élèves, peut expliquer que le travail sur le numérique fait obstacle au travail de transformation qui est une activité essentielle du domaine de l'algèbre.
Dans le cadre de la résolution de problèmes selon les exigences des professeurs. l'obstacle est moindre,
La diversité des points de vue que le professeur est conduit à adopter en passant d'un domaine à un autre, est donc un facteur de difficulté important. mais inévitable.
Dans le passage de l'algébrique au fonctionnel une nouvelle difficulté apparaît. L'expression 2x + 3y peut être interprétée comme l'écriture d'un nombre, ou comme un algorithme de calcul. Deux attitudes possibles de l'enseignants devant une expression algébrique : il la considère comme l'écriture d'un nombre ou il la considère comme algorithme de calcul**,** et souvent, sans crier gare. Ces deux points de vues risquent de s'opposer dans la logique de l'élève, si on n'y prête pas une attention particulière, c'est à dire si les choses ne sont pas clairement explicitées. *Le premier point de vue est algébrique, le deuxième est carrément fonctionnel.*
Le statut de la lettre semble aussi être difficile à installer : x pour variable mais aussi pour inconnue, a pour nombre, coefficient mais aussi pour paramètre, A pour point mais aussi pour **«** AIRE **»,** n pour entier,.., la même lettre peut avoir plusieurs statuts cette complexité est aussi un des obstacles à l'apprentissage de l'algèbre.
Le dosage entre le travail sur les techniques de calcul et le travail sur le sens n'est pas toujours équilibré. Dans les compétences exigibles en collège les tâches correspondantes sont de type technique, même s'il est indiqué dans le chapeau que les activités centrales doivent être des activités de résolution de problèmes.

En classe, pour quels types de tâches a-t-on recours à l'algébrique? Quelles difficultés?

"L'algèbre objet d'étude : On travaille les techniques de calculs et d'ailleurs lorsqu'on consulte les cahiers des élèves on trouve des pages et des pages de calculs sans aucun texte indiquant la tâche, ou expliquant les techniques utilisées.
"L'algèbre outil" de résolution de problèmes *:* parmi les problèmes posés, certains peuvent être résolus par l'arithmétique et cependant on impose souvent une solution algébrique loin d'être

convaincante pour la. plupart des élèves. Une autre difficulté dans le passage du traitement numérique au traitement algébrique d'un problème tient au fait que si le raisonnement arithmétique ramène toujours au caractère concret de la situation, l'algébrique fait sortir de ce cadre. Dans la modélisation des problèmes concrets ou dits « de la vie courante » il y a perte de sens pour les lettres, perte de sens pour les opérations et il n'est pas rare de voir alors. 2X x 3X se transformer en 6X..

Dans la résolution algébrique de ces problèmes une autre difficulté intervient liée au choix de l'inconnue. La diversité des solutions proposées par les élèves est un facteur d'intérêt pour eux.

En conclusion

Il importe donc de déterminer de façon plus précise. les travaux qui dans le cadre du numérique permettraient de mieux préparer les élèves à l'apprentissage de l'algèbre.

- Le calcul mental ou le calcul «raisonné » (qui consiste à faire écrire par les élèves les étapes qui conduisent au résultat) amènent à effectuer des transformations pour déterminer plus facilement le résultat. Ces activités de transformations d'écritures sont sans doute des aides dans l'apprentissage de l'algèbre.
- Des exigences plus systématiques dans la rédaction des solutions, pour aller dans le sens d'une modélisation du problème.
- Des problèmes d'arithmétique que l'algèbre permet d'expliquer et de généraliser

ANNEXE B

Ces extraits du « dictionnaire de didactique des mathématiques » ont été distribués par Y. Chevallard lors d'une université d'été. A ce jour, l'ouvrage complet n'a pas été encore édité.

Une organisation mathématique «de base» comporte minimalement et en principe un type de tâches T, une technique d'étude τ relative à T, une technologie θ relative à τ, enfin une théorie Θ relative à θ : on la note T/τ/θ/Θ et on dit en ce cas qu'il s'agit d'une organisation mathématique ponctuelle, c'est-à-dire constituée autour d'un type de tâches unique T. L'ensemble T/τ est le «bloc» pratique (ou praxique). et l'ensemble θ/Θ est l'environnement technologico-théorique.(…)
Le travail d'étude dans une classe a pour objet de «mettre en place» une succession d'organisations mathématiques ponctuelles, locales. régionales, globales, dont le professeur fait progressivement dévolution aux élèves.(…) Lorsque celle-ci est réussie, l'organisation mathématique devient, pour les élèves, une **praxéologie mathématique,** c'est-à-dire un système de techniques permettant d'accomplir (praxis)**,** de manière justifiée et intelligible (logos) des tâches mathématiques de divers types : le grec **praxis,** «action » (de **prassein, « agir »**) renvoie au bloc T/τ tandis que **logos** se réfère à l'ensemble technologico-théorique θ/Θ. «Organisation mathématique» et «praxéologie mathématique» désignent donc les deux faces d'une même réalité dont la première expression souligne le caractère objectif (indépendant de qui l'utilise), et la seconde la valeur subjective (comme moyen d'une action raisonnée). Ce qu'on a appelé (…) une **œuvre** (mathématique) apparaît ainsi comme un système d'organisations mathématiques (ponctuelles, locales, régionales, globales), et la «réponse» que l'œuvre apporte à une question qui lui est posée comme consistant, concrètement, en une certaine praxéologie, dont le bon usage permettra de produire la réponse particulière cherchée.

La dévolution et la mise en place d'une praxéologie mathématique dans une classe constitue sans doute le «noyau dur» de l'activité du professeur. Mais avant cela, la conception et l'élaboration de l'organisation mathématique correspondante est — aujourd'hui plus qu'autrefois peut-être un problème essentiel de fait, en beaucoup de cas, les organisations mathématiques observables tant dans les manuels « in vitro » que dans les classes « in vivo » pèchent par de nombreux aspects : types de tâches non explicités ou choisis de manière aléatoire, sans grande réflexion préalable ; techniques à peine ébauchées ou peu efficaces et peu fiables ; technologies incertaines, où l'implicite et le dogmatisme remplacent souvent la construction raisonnée que l'on attendrait ; etc.

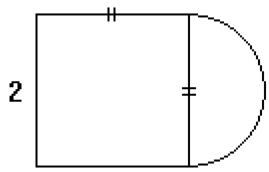
ANNEXE C

ECRITURE DES NOMBRES NON ALGEBRIQUES

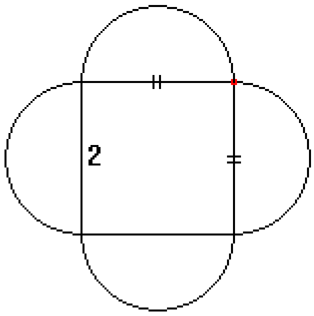
Au cours du cursus scolaire du collège et du lycée, on est amenés à écrire des nombres non algébriques. Il nous a semblé que les exigences quant à leur écriture ou leur utilisation étaient floues. Nous avons listé là, les questions que nous nous sommes posées à ce sujet.

6ème Quelle exigence a-t-on dans les exercices sur l'aire du disque □R^2 ? □□25 ? 25□ cm^2 ?
Que dira-t-on du résultat 75 cm^2 ?

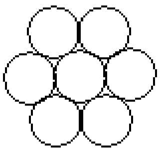
5ème Demande-t-on de factoriser □^{2} – 3□ ?
de développer 2(□. 3) ?
Qu'attend-on comme résultat pour l'aire



$4+\frac{\pi}{2}$



$4+\frac{4\pi}{2}$?
$4+2\pi$?
$2(2+\pi)$?



□□R^2. 6□□□R^2 ?

4ème Demande-t-on de simplifier $\frac{\pi+2}{2}$? $\frac{3\pi+6x}{3}$?
Demande-t-on de trouver des encadrements de □ ?

3ème Demande-t-on de calculer $(1+\sqrt{\pi})^2$
$\sqrt{(\pi-2)^2}$? $\sqrt{(3-\pi)^2}$?
Demande-t-on le calcul du angle dont on connaît le sinus ? le cosinus ? la tangente ?
$\cos x=-1, \cos x=\frac{1}{2}$?

Seconde

Demande-t-on de calculer $\sqrt{(2-\pi)^2}$?
Demande-t-on de montrer que :
$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$
$\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 a-\cos^2 b$

BIBLIOGRAPHIE

- CHEVALLARD Yves.1989.: Arithmétique algèbre modélisation, étapes d'une recherche : IREM d'Aix-Marseille

- CHEVALLARD Yves. 1984. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques : IREM de Grenoble, Petit x n° 5 (p 51-94)–
n°19 (p 45-75)- n°23 (p 5-38)

- COMBIER Gérard, GUILLAUME Jean Claude, PRESSIAT André. 1996.
Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre : INRP

- HENRY Michel.. 1991 : Didactique des mathématiques IREM de Besançon

- MILLET Jean Luc. 1995. Calcul algébrique en classe de seconde : IREM de Limoges

- MILLET Jean Luc. 1999. Calcul algébrique en classe de seconde, des activités pour la classe : IREM de Limoges

- VASSARD Christian. 1997. Le numérique et l'algébrique, les oubliés du programme de seconde : CNDP de Haute Normandie, IREM de Rouen.

- GROUPE SECOND CYCLE. 1997. Comprendre ses erreurs algébriques équations et inéquations au collège et au lycée : IREM de Toulouse

- GROUPE COLLEGE. 1996. Des schémas pour consolider le sens de la numération et des opérations : IREM de Toulouse

- Algébrisation. Calcul algébrique : Brochures de l'IREM de Lorraine

- GECO. 1997. Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?: Repères I.R.E.M. n° 28

- DUPPERRET Jean Claude, FENICE Jean Claude. 1999. L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège.: Repères I.R.E.M. n° 34

- Groupe de travail après EVAPM. 1994. Calcul littéral : Bulletin APMEP n°395 (p494)

- DELEDICQ André. 1995. La perte du sens, essence des maths : Bulletin APMEP n°400 (p804)

- Travaux de l'APIE Aurignac, Boulogne sur Gesse, l'Isle en Dodon

- EVAPM

- Avec nos remerciements à Jean Luc Millet pour son aide