Atelier « Du calcul numérique au calcul algébrique »

Compte rendu Ateliers II a) et II c)

1. Problématique

Lorsque nous allons dans les classes de collège, nous observons souvent des pratiques qui posent problèmes, surtout dans les champs « travaux numériques » et « organisation et gestion de données - fonctions » : passage de quelques exemples à une règle générale, présentation de notions à partir de situations sans expliciter le statut de l'énoncé mathématique qui suit, travail de gammes excessif ou prématuré sans construction suffisante du sens au préalable, distorsion préjudiciable à la cohérence d'ensemble du cours de mathématiques dans la place accordée au raisonnement et à la démonstration selon qu'on se situe dans le domaine numérique ou géométrique.
Nous voyons bien que ces pratiques ne sont pas satisfaisantes mais nous avons du mal à convaincre et, de toute façon, le temps limité de l'entretien qui suit l'inspection ne permet pas d'entrer dans les détails et d'aider à vraiment reconstruire.
Pn ailleurs, lorsqu'on regarde de plus près les résultats à l'épreuve écrite du brevet des collèges, on est frappé par le pourcentage élevé de notes inférieures[1] à cinq sur vingt. Au-delà des explications sur la place de l'épreuve de mathématiques, qui arrive la dernière alors que certains élèves pensent avoir échoué ou au contraire réussi, au-delà du fait que nombre d'entre eux rendent leur copie bien avant la fin du temps imparti à l'épreuve, il semble paradoxal qu'autant de candidats ne parviennent pas à « glaner » davantage de points sur les traditionnels « travaux numériques » des épreuves alors qu'ils sont souvent très « entraînés » par les professeurs. Il y a lieu de réfléchir à la façon dont les élèves perçoivent ces exercices techniques hors de tout contexte : dès lors qu'ils ont répondu, ils ont fait leur travail et ont rarement recours à un contrôle de leurs résultats (substitution d'une valeur numérique, calculatrice, ordre de grandeur, etc.). Ils sont d'ailleurs trop peu souvent invités à le faire en classe.

Le projet de programme de collège insiste beaucoup plus sur la construction mathématique du numérique et de l'algébrique. Il suggère explicitement certaines justifications sur des exemples numériques génériques, qui, si on est bien au clair sur leur statut, permettent de préparer le passage numérique/algébrique. Il demande aussi des démonstrations de résultats de cours dans le domaine algébrique.

Les réflexions des ateliers se sont appuyées, entre autres et de manière un peu différente selon les ateliers,

– sur l'analyse d'une séance d'introduction à la somme de deux nombres relatifs observée par Yves Olivier montrant la place d'un raisonnement algébrique pour justifier les règles de calcul une fois défini l'opposé d'un nombre relatif (annexe 1) ;

[1] Académie de Versailles 2002 – répartition des notes à l'épreuve écrite du brevet (collèges publics – chiffres pour l'académie)

		Mathématiques		
	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20]
REP	47,44	34,49	14,62	3,45
Hors REP	26,56	32,45	26,98	14,01
Total	31,03	32,89	24,33	11,74

- sur l'analyse d'activités tirées de manuels sur la résolution d'équations (image de la balance pour résoudre mais aussi pour faire comprendre que si $a = b$ alors $a + c = b + c$, utilisation qui ne semble pas pertinente) ;
- sur une première lecture de la présence d'algèbre dans le projet de programme préparée par Alain Diger (voir annexe 2) ;
- sur des citations du rapport de la commission dite Kahane sur le calcul (voir annexes 3 et 4).

Le temps a manqué pour qu'on puisse compléter un tableau comme celui de l'annexe 5, mais il nous semble que ce serait un travail à faire avec les professeurs.

2. Trois points qui ressortent des ateliers

Conformément à la demande qui avait été faite, nous faisons ressortir trois points qui ont fait l'objet d'un accord suite aux discussions dans les deux ateliers et qu'il semble important de souligner dans nos rencontres avec les professeurs.

Point 1 : situations

L'apparition de la résolution algébrique des équations constitue en classe de quatrième un lieu au sein duquel s'opère un passage du numérique à l'algébrique. Pour effectuer ce passage, il est apparu nécessaire de mettre successivement en place deux types de situations.

Dans un premier temps, il s'agit des situations que les élèves savent résoudre par des procédures anciennes, numériques ou arithmétiques : ce sont des problèmes pouvant se ramener à des équations du type $a\ x + b = c$ dont la résolution s'appuie sur les définitions de la différence et du quotient à savoir $a + (b\ a) = b$ et $a\ (\frac{b}{a}) = a$. En effet ces définitions permettent de résoudre « naturellement » $a + x = b$ et $a\ x = b$.

Ce choix permet de partir des acquis des élèves puis de mettre en évidence une rupture essentielle avec le savoir nouveau. On peut également envisager à ce premier stade la résolution d'équations du type $a\ x + b = c\ x + d$ dans des cas particulièrement simples où la solution peut apparaître d'évidence ou après quelques tâtonnements. L'intérêt de ces recherches conduites par les élèves à l'aide de procédures non expertes, que Roland Charnay qualifie de « bidouillages », est de permettre une première familiarisation avec des équations à second membre non constant. On peut penser à des procédures d'essais-erreurs, de fausse position ou à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

Dans les secondes situations dont la problématisation doit être soignée et plus complexe, l'algébrisation devra apparaître comme indispensable. L'introduction de la méthode algébrique, lourde et déstabilisatrice pour les élèves, est alors légitimée par le fait qu'elle est la seule permettant d'atteindre la solution du problème. Cette condition nécessite de recourir à des problèmes conduisant à des équations du type $a\ x + b = c\ x + d$ dont la solution ne soit pas facilement accessible par tâtonnement.

Point 2 : construction des savoirs et démonstrations

Dans les nouveaux programmes, la construction des savoirs concernant les quotients passe par une progression cohérente et continue sur les quatre années du collège. Là encore, est organisé un passage du numérique à l'algébrique et il se trouve même particulièrement visible. En effet, en classes de sixième et de cinquième un certain nombre de justifications de règles est attendu sur des exemples numériques. Ces justifications ont une valeur générique en ce sens que la méthode utilisée est transférable à la démonstration générale, dans le registre du calcul littéral, qui sera conduite en classe de quatrième. Le caractère générique des exemples favorise évidemment le passage du numérique au littéral.

En classe de sixième, la définition du quotient est utilisée exclusivement dans le numérique, notamment dans les problèmes relevant du champ de la proportionnalité. On note aussi dans le programme de cette classe, que *« Le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre est mis en évidence et utilisé »*. Du point de vue de la construction du savoir, cette mise en évidence est d'une ambition autre que la simple utilisation. Elle peut se faire au travers de situations de proportionnalité en « révélant » le coefficient de proportionnalité par exemple dans le tableau de proportionnalité suivant :

a	ka
b	kb

. On a donc $\frac{b}{a} = \frac{kb}{ka}$.

La preuve algébrique pouvant être la suivante en utilisant l'associativité de la multiplication : de $a \times \frac{b}{a} = b$ on déduit que $k \times \left(a \times \frac{b}{a} \right) = k \times b$ soit $(ka) \times \frac{b}{a} = (kb)$. Ce qui nous donne l'égalité par définition du quotient de *kb* par *ka.*

Cette démonstration formalisée dans le cadre algébrique apparaît prématurée à ce niveau mais l'intention d'explicitation est présente et la démonstration peut être envisagée en classe de quatrième.

En classe de cinquième, les opérations sur les quotients, addition et multiplication, vont, là encore, faire l'objet d'une étude aux deux niveaux que sont l'utilisation mais aussi la justification des procédés mis en place. On trouve ainsi : *« Le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écritures fractionnaires … et sur la justification du procédé de calcul. »* et *« Dans le cadre de la résolution de problèmes, les élèves sont confrontés à des sommes de fractions du type 2/3 + 3/4 : pour les traiter, ils utilisent des procédures réfléchies … mais l'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. Celle-ci est établie en 4è »*. On note donc que le souci de justification est très présent. Concernant l'addition, il est repoussé à la classe de 4è mais il y est, par contre, réclamé très nettement, les termes employés invitant clairement à une démonstration qui sollicitera inévitablement l'algèbre : de la permanence des propriétés sur les opérations (en particulier de la distributivité de la multiplication sur l'addition) on peut déduire que $b \times \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right) = b \times \frac{a}{b} + b \times \frac{c}{b}$ ce qui donne $b \times \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right) = (a + c)$, d'où la justification du résultat cherché à l'aide de la définition du quotient.

Le passage à l'algébrique pour fournir les justifications précédemment citées est donc de mise en classe de quatrième.

Enfin, en classe de troisième, les notions de fraction irréductible et de rationnel constituent un aboutissement autorisant la pratique systématique des simplifications et couronnant le travail conduit depuis la classe de sixième pour construire le statut de nombre d'un quotient.

Point 3 : activités

Le terme « activité » fait débat dans le cadre de l'enseignement des mathématiques notament parce que sa définition n'est pas partagée. Il semble utile de porter à la connais sance des professeurs la définition qu'en donne le projet de programme[2]. Elle figurait déjà dans l'ancien mais sa position a été revalorisée : du bandeau de la classe de sixième elle est passée à l'introduction générale pour le collège. On notera que dans leur grande majorité les activités présentes dans les manuels ne remplissent pas les conditions réclamées par cette définition. Les professeurs devront aussi avoir présente à l'esprit une réalité incontournable : les activité figurant dans les manuels sont figées par le simple fait qu'elles y sont écrites. On pourra donc inciter les professeurs à recourir, lorsque c'est utile, aux situations problèmes au sens où Roland Charnay les définit avec une problématisation soignée plaçant l'élève dans en situation d'autonomie adaptée et de recherche authentique (au sens de « bidouiller » et non de rechercher dans un répertoire une procédure connue selon les termes de Roland Charnay). Ces situations ouvertes présentent également le mérite d'apparaître en parfaite cohérence avec l'apparition de questions ouvertes dans la nouvelle maquette du bac S.

---

[2] *Extrait de l'introduction générale du projet de programme*

A - Une place centrale pour la résolution de problèmes

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux "outils", qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout. Les activités choisies doivent :

- *permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;*
- *créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;*
- *rendre possible la mise en jeu des notions dont l'apprentissage est visé ;*
- *fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.*

Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également le moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.

ANNEXE 1

L'addition des nombres relatifs
au travers du vécu d'une séance de 5$^{\text{ème}}$
observée par Yves OLIVIER en février 2004

L'addition des nombres relatifs est une difficulté repérée de calcul pour une majorité d'élèves quelle que soit la classe. Je me suis donc intéressé à son enseignement. J'y ai repéré plusieurs dysfonctionnements : pas de statut donné au nombre **relatif** (relatif à quoi ? place par rapport à zéro ? distance à zéro ? valeur absolue ? j'ai même entendu valeur numérique !), peu de sens donné à l'opération, des techniques privilégiées, aucun moyen donné pour vérifier les calculs, calculs à la main privilégiés sur toutes les autres formes (mental ou calculatrice par exemple) enfin confusion du sens des signes + (positif ou addition) et − (négatif ou soustraction ou opposé).
La « chance » m'a été donnée d'observer le 16 février une séance très significative en cinquième sur cet enseignement. On la voit hélas très souvent consignée dans les cahiers d'élèves.

Le texte de « l'activité » proposée aux élèves est en annexe : l'ascenseur !
Voici l'extrait de mon rapport :

La séance a pour objectif l'addition des nombres entiers relatifs.

La séance débute par la correction d'un exercice de placement de nombres décimaux relatifs sur une droite graduée. Au vu du nombre d'erreurs, cette notion ne semble pas acquise. Pour savoir si 2,15 est « plus près » de 2 que de 3, il aurait été intéressant, dans la perspective de la suite, de s'intéresser dès le début à leur distance à zéro. En effet on s'appuierait ici sur la connaissance des décimaux positifs et l'on se dispenserait de « faire » la graduation de la droite au 1/100^{e}.

On passe ensuite à une « activité » dénommée « l'ascenseur » devant permettre d'introduire l'addition des nombres relatifs. Dans cette situation, les élèves confondent les numéros des étages et les différences de niveau entre étages d'où les erreurs (par exemple « descendre de 7 niveaux » et « niveau 7 », ce qui est le cas uniquement au premier déplacement puisque l'on est supposé partir du niveau 0). D'évidence cette activité aurait dû travailler uniquement les déplacements relatifs quelque soit le niveau de départ et faire constater que « descendre de 6 niveaux puis remonter de deux niveaux » revient à « descendre de 4 niveaux » ce qui pourrait se traduire par (6) + (+2) = (4), en s'assurant que le signe plus entre les deux nombres représente bien un prolongement de l'addition des nombres positifs. La situation est à peine assimilée par quelques élèves de la classe que l'on passe à la « technique » puis aux décimaux relatifs. Il est nécessaire, dans cette phase très importante qui conditionne la compréhension de l'algèbre, de laisser le temps aux apprentissages en variant les situations et en montrant la permanence des « règles ». D'autre part, il est nécessaire d'envisager la preuve de ces règles (comme le propose le document diffusé en début d'année scolaire par l'inspection pédagogique régionale) : des exemples en mathématiques ne suffisant pas à prouver de tels résultats. En fin d'heure on « simplifie » les écritures en supprimant les signes + et les parenthèses autour des nombres relatifs. Cela semble bien prématuré.

Ce qui a été observé est hélas classique et nous incite à professionnaliser notre aide aux professeurs :
Ce n'est pas une réelle activité au sens où tout est balisé.
Les élèves étaient en recherche individuelle avec un professeur « papillonnant » d'élève en élève au gré des **mêmes** questions : un élève « madame je comprends pas : je descends au −3 et je remonte à l'étage 7 ? Réponse du professeur « mais non ! Tu es à l'étage 3 et tu remontes de 7 étages » et l'élève de répondre « Ah bon ! C'était pas clair ! » ou encore après l'énoncé des règles « (− 6) + (+2) = −8 j'ai bon ? » « Non, regarde je te montre et le professeur de dire « (− 6) + (+2) = −4 tu cherches d'abord le signe et puis tu fais la différence ». L' « activité » est déjà oubliée !
Une analyse a priori aurait évidemment repéré ce qui n'allait pas :

Ce sont de bizarres déplacements relatifs : à chaque « opération », on repart toujours du niveau 0. On introduit **une loi non interne** (à tout couple de déplacements, elle associe un numéro d'étage) en faisant agir des déplacements relatifs (descente de n étages, montée de p étages) sur des noms d'étage (niveau -5, niveau 0, niveau +7). En fait il aurait suffit de s'intéresser au déplacement relatif obtenu après les deux déplacements et montrer que ce résultat est indépendant de l'étage de départ.
Pourquoi noter + cette « opération ». Quelle légitimité ?
Bref :
- c'est du concret artificiel car le modèle mathématique n'apporte rien ;
- c'est du concret peu pertinent car même s'il se situe dans un domaine familier à l'élève le lien entre l'opération algébrique et la situation est non intuitif, l'écriture de l'opération donnée a priori est même totalement arbitraire ;
- comme souvent il pose un problème mathématique en mêlant des nombres abscisses et des nombres indiquant un déplacement ;
- l'activité ne constituera pas une référence solide pour la mémoire de classe pour plusieurs raisons : le lien non intuitif déjà évoqué, la difficulté qu'il y aura à court terme à faire apparaître la soustraction, l'impossibilité qu'il y aura à moyen terme de faire apparaître la multiplication (il faudra donc changer de contexte pour assurer la continuité du sens).

Par ailleurs il est important de noter que cette activité semble caduque au vu des nouveaux programmes. En effet, elle me semble prévue pour des élèves connaissant l'existence et la notation des nombres relatifs et qui découvrent l'addition. Or dans le nouveau programme, les relatifs ne sont plus vus en 6ème. Ils sont introduits en 5ème et, justement, le programme suggère que rendre l'addition toujours possible pourrait constituer une justification à l'apparition de ces nouveaux nombres.

Au cours de l'entretien, pour aider le professeur à justifier les règles données aux élèves, je me suis appuyé sur le **principe de permanence** des propriétés de l'addition et sur la **définition de l'opposé** $a + (a) = 0$.
Ainsi appelons s le résultat de $(-5) + (-7)$. Alors $s + 7 = - 5$ et donc $s + 7 +5 = 0$
d'où $s + 12 = 0$ ainsi $s = \ 12$! Lumineux non ? Et ça marche ! Alain DIGER a mis au point un texte donnant une progression de $5^{\text{ème}}$ aidant à justifier les règles à partir de la notion d'exemples reproductibles ou généralisables.

En bilan :

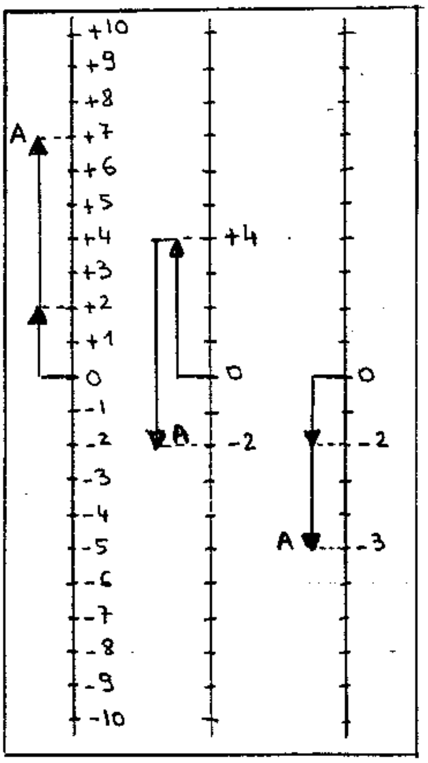
1. Attention les « nouveaux » programmes évoluent sur le numérique dans le sens d'une meilleure problématisation tirant vers l'algèbre ;
2. L'activité « l'ascenseur » pour l'addition des relatifs (comme la balance pour les équations) montre les faiblesses du concret sur le domaine algébrique ;
3. Il nous faut sans cesse mettre en lumière, finalement par la négative, ce que devrait être une bonne activité (dont le programme rappelle une définition qui figurait déjà dans l'ancien) ;
4. Heureusement le programme attend plus du point de vue de la construction mathématique et fournit des pistes qu'on peut suivre. Ces pistes emmenant pour le cas présent vers une construction sur des exemples. Le concret pouvant dans un second temps retrouver droit de cité mais en temps qu'application. Le modèle est mathématique, le concret est le modélisé et non l'inverse comme semble le présenter l'activité.

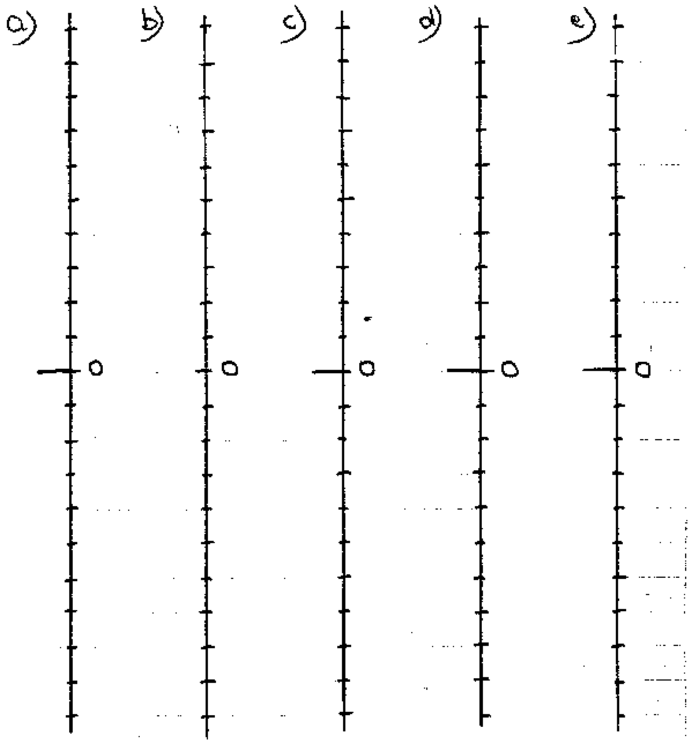
Annexe : l'activité distribuée aux élèves

Activité 1: l'ascenseur

Dans un immeuble, un ascenseur permet d'accéder plus rapidement aux étages supérieurs (niveau +1 , +2, +3) ou aux sous-sols (niveau –1 , –2, –3). Pour chacun des cas, l'ascenseur part du rez-de-chaussée (niveau O).
On écrit le fait de « monter » à l'aide d'un nombre positif et le fait de « descendre » par un nombre négatif.

- L'ascenseur *monte* de 2 niveaux, puis *monte* de 5 niveaux. Il s'arrêtera au niveau + 7. On peut traduire cette situation par une addition: (+ 2) + (+ 5) = (+ 7)
- L'ascenseur *monte* de 4 niveaux, puis *descend* de 6 niveaux. Il s'arrêtera au niveau – 2. On peut traduire cette situation par une addition: (+ 4) + (– 6) = (– 2)
- L'ascenseur *descend* de 2 niveaux, puis *descend* de 3 niveaux. Il s'arrêtera au niveau – 5. On peut traduire cette situation par une addition: (– 2) + (– 3) = (– 5)





En vous inspirant des exemples donnés au-dessus, dessinez les trajets de l'ascenseur puis écrivez les additions correspondant aux situations suivantes :
a) L'ascenseur monte de 7 niveaux, puis descend de 3 niveaux
b) L'ascenseur monte de 4 niveaux, puis monte de 6 niveaux
c) L'ascenseur descend de 5 niveaux, puis descend de 4 niveaux
d) L'ascenseur descend de 6 niveaux, puis monte de 2 niveaux
e) L'ascenseur monte de 4 niveaux, puis descend de 4 niveaux

application : En utilisant la technique de l'ascenseur, calcule les additions suivantes.

A = (– 7) + (+ 6) = B = (– 12) + (– 5) = C = (+ 4) + (– 2) =
D = (+ 3) + (– 4) = E = (+ 3) + (+ 5) = F = (+ 6) + (– 2) =
G = (– 6) + (– 4) = H = (– 6) + (+ 9) = J = (+ 9) + (– 9) =

Activité 2 : le jeu

Au jeu on décide d'associer un gain à un nombre positif et une perte à un nombre négatif
Associer chaque phrase P avec une opération O et une réponse R.

P1	Gain de 9,50 suivi d'un gain de 3,80
P2	Gain de 9,50 suivi d'une perte de 3,80
P3	Perte de 9,50 suivie d'une perte de 3,80
P4	Perte de 9,50 suivie d'un gain de 3,80

O1	(– 9,5) + (+ 3,8)
O2	(– 9,5) + (– 3,8)
O3	(+ 9,5) + (– 3,8)
O4	(+ 9,5) + (+ 3,8)

R1	+ 5,7
R2	+ 13,3
R3	– 5,7
R4	– 13,3

ANNEXE 2

L'algèbre dans le nouveau programme du collège du 17/01/04

Alain Diger   académie d'Orléans-Tours

Classe de 6ème :

Peu d'éléments réellement qualifiables d'algébriques à ce niveau, néanmoins pour *a* et *b* entiers, le quotient *a/b* est défini comme ***le*** <u>nombre</u> qui multiplié par *b* donne *a* c'est à dire comme solution unique de l'équation $b\ x = a$. Cette définition est donc de toute évidence d'ordre algébrique contrairement à celle qui a été vue par les élèves à l'école où *a/b* désignait une fraction de l'unité (l'unité étant partagée en *b* parties égales on obtient la fraction *a/b* en prenant *a* de ces parties).

Même si la formulation utilisée en 6ème n'est pas aussi formalisée face à des élèves de cet âge, l'outil mathématique est mis en place et sera disponible pour une construction des nombres rationnels qui aboutira en 3ème avec la notion de fraction irréductible et de rationnel.

Le programme de 6ème fait apparaître deux attentes sur ce thème du point de vue des justifications :

- *« … mettre en évidence et justifier, par exemple, que prendre « 17 pour cent d'un nombre » revient à multiplier ce nombre par 17/100 … »*
  Commentaire : il me semble qu'il s'agit ici de recoller les deux définition de 17/100. La définition ancienne, à savoir 17 fois le centième de l'unité, et la définition nouvelle, à savoir le centième de 17, sont non contradictoires. Cette vérification est proposée sur un exemple mais elle a valeur générale au sens où elle est reproductible pour tout autre exemple et même sous forme littérale où elle deviendrait alors une vraie démonstration (certes prématurée en 6ème). Une fois cette identification acquise la définition de 6ème peut devenir la référence systématique dés que la notation a/b apparaît et la construction mathématique devient complètement possible.
- *« … Le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre est mis en évidence et utilisé. »*
  <u>Commentaire</u> : à partir de la définition de *a/b* cette preuve est facile à donner, même en 6ème, pourvu que le professeur soit au clair avec le statut de l'égalité qu'il transmet. En clair des énoncés comme : si $a = b$ alors $a\ c = b\ c$, doivent être perçus comme des évidences liées à la nature de l'égalité et non comme des propriétés à démontrer ni même à admettre (on observe parfois des essais de démonstration de telles propriétés en 4ème pour introduire le travail sur les équations. Ces essais partent toujours de propriétés admises qui sont plus complexes que celle que l'on veut démontrer).

Classe de 5ème :

Cette classe marque le réel début du travail sur l'algèbre avec la mise en place de trois points fondamentaux :

- les priorités opératoires (sur lesquelles se construit l'aspect procédural) ;
- la distributivité de la multiplication sur l'addition (à partir de laquelle seront établies les premières transformations d'écritures littérales, elle permet donc d'entrer dans l'aspect structural et justifie qu'on s'applique à distinguer sommes et produits) ;
- le test d'égalité qui est la pierre angulaire dans la construction du sens : il remet en cause le statut de l'égalité qui devient *« … une assertion dont la valeur de vérité est à examiner… »*. Il fournit l'occasion de mettre en œuvre la substitution et permet de construire, en les dissociant, les concepts d'équation et d'identité littérale.

Dans le domaine numérique, plusieurs occasions apparaissent de mettre en œuvre des raisonnements de type algébrique même si ils seront plutôt conduits sur des exemples que sur des variables :

- pour introduire les nombres relatifs (on suggère à ce sujet autre chose que le recours à des situations concrètes) : *« La notion de nombre relatif est introduite à partir d'un problème qui en montre la nécessité (par exemple pour rendre la soustraction toujours possible) » ;*
- pour construire la soustraction : *« En particulier, il est établi que soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé… » ;*
- pour la construction des nombres positifs en écriture fractionnaire qui se poursuit : *« L'égalité ac/bc = a/b fait l'objet d'une justification en s'appuyant sur des exemples numériques »*. On peut prolonger : les règles d'addition et de multiplication s'établissent de la même manière. Le programme étale ce travail sur tout le cycle central. Pour l'addition on lit : *« … l'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. Celle-ci est établie en 4ème. »* et pour la multiplication : *« Le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de nombres en écritures fractionnaires … et sur la justification du procédé de calcul »*.

Classe de $4^{\text{ème}}$:

Le travail algébrique est maintenant bien en place et il se poursuit sur les deux terrains déjà investis : le littéral (transformations d'écritures, équations) et le numérique (construction et extension des opérations à de nouveaux nombres).

- Calcul littéral : l'insistance est mise sur la recherche de sens, sur les raisons qui conduisent à mener le travail par opposition à une recherche de virtuosité gratuite. Le test d'égalité et la reconnaissance de structure (somme ou produit) sont mis en avant. Apparaissent les techniques de résolution d'une équation du premier degré et le développement d'expressions du type $(a + b) (c + d)$.
- Calcul numérique : le raisonnement algébrique continue à servir la construction des opérations sur les quotients et les relatifs. Il permet notamment de justifier sur des exemples la règle des signes dans un produit, règle qu'aucune situation concrète ne peut illustrer. Le programme cite explicitement la propriété dite « d'égalité des produits en croix » (dont l'usage est désormais clairement proscrit en $6^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$) comme étant à démontrer.
  Les équivalences entre $a > b$ et $a \quad b > 0$; $a < b$ et $a \quad b < 0$ sont mises en évidence. Puis *« comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence »* est utilisé pour démontrer un certain nombre de résultats sur l'ordre.

Classe de $3^{\text{ème}}$:

L'esprit reste le même : priorité à la construction du sens et non à la virtuosité technique : *« C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral présente du sens et où il reste simple à effectuer que l'on amène l'élève à recourir à l'écriture algébrique lorsqu'elle est pertinente ».*

L'importance du travail sur la reconnaissance de forme et sur le test d'égalité est à nouveau réaffirmée. Les deux pôles, extension du calcul littéral et mise au service de ce calcul pour construire le numérique, restent présents. Apparaît, comme antérieurement, la notion de fonction sur l'exemple des fonctions linéaires puis des fonctions affines (ordre désormais affiché dans le programme).

- Extension du calcul littéral : inéquations du premier degré, équations produits, systèmes de deux équations à deux inconnues, identités remarquables
- Construction du numérique : construction des algorithmes des différences et d'Euclide pour la recherche d'un PGCD, démonstration des propriétés de la racine carrée, démonstration de l'effet de la multiplication sur l'ordre (seul le cas où on multiplie par un positif a été traité en $4^{\text{ème}}$), démonstration du fait que la représentation d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.
- Fonctions : Les changements par rapport à l'ancienne rédaction des programmes sont limités mais existent : apparition du terme antécédent, *« déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule »* (on se rapproche du programme de la classe de 2de, des fonctions non affines peuvent être rencontrées ici), incitation à s'appuyer sur des situations, notamment variations d'aires ou de volumes. Plus généralement la progression est balisée : la fonction linéaire apparaît d'abord comme *« modèle mathématique pour le traitement des situations qui relèvent de la proportionnalité et permet une synthèse d'un apprentissage commencé à l'école primaire. »* Les procédures anciennes de traitement de la proportionnalité sont reliées aux propriétés de linéarité et d'homogénéité de la fonction linéaire ce qui donne tout leur sens à ces propriétés. L'énoncé de Thalès permet d'établir que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine. Puis les fonctions affines apparaîtront comme modèles dans des situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité mais pour lesquelles la représentation graphique est néanmoins une droite. La proportionnalité des écarts sera mise en évidence dans ce travail.

ANNEXE 3

Citations du rapport sur le calcul de la commission Kahane

2) L'esprit : finalités et sens

Cadre général :

« A certaines époques la question semble ne pas se poser. A la nôtre, on ne peut esquiver la finalité de l'enseignement. Pourquoi enseigner les mathématiques ? »
(*CREM, présentation des rapports et recommandations, p1*)

« Les mathématiques sont une discipline exigeante. Les élèves que nous invitons à l'effort sont en droit de s'interroger sur les raisons qui poussent à en faire. »
(*accompagnement des programmes de terminales, juillet 2002*)

« Le passage du calcul numérique au calcul algébrique constitue une véritable révolution. »
(*CREM, rapport d'étape sur le calcul, p28*)

Un constat critique :

« … le calcul est omniprésent dans les pratiques mathématiques… l'image qu'en véhiculent la culture et l'enseignement est profondément inadaptée, ceci ayant des effets négatifs sur l'image même des mathématiques. »
(*CREM, rapport d'étape sur le calcul, p2*)

« Le calcul renvoie à une activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. En bref, le calcul est perçu comme renvoyant aux basses œuvres du travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle liée au raisonnement est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques. Cette image, ancrée dans la culture, est aussi portée par l'enseignement. C'est une géométrie synthétique, sans calcul, qui est presque exclusivement mobilisée quand il s'agit d'initier les élèves à la rationalité mathématique, de leur apprendre à démontrer… »

« …lorsqu'on demande à des enseignants quelles sont les fonctions de l'algèbre au collège, la fonction d'outil de preuve n'est généralement pas identifiée. »

« On estime par ailleurs que, si l'on dispose d'instruments pour effectuer la partie mécanisée du calcul, il n'y a plus rien à apprendre puisque le calcul s'y réduit. »

« Le calcul, qu'il soit numérique ou algébrique, est en fait réduit à ses traces et le raisonnement qui le guide reste invisible. »
(*CREM, rapport d'étape sur le calcul, p16*)

« Dire qu'une propriété est utilisée comme règle opératoire signifie qu'on n'est pas tenu d'en justifier l'usage dans une démonstration ou dans un calcul. »
(*programme de TS, août 2001*)

Des évolutions attendues :

« Il y a, dans l'enseignement, à lutter contre cette vision réductrice du calcul… Le calcul, dés les débuts de la scolarité élémentaire, peut et doit être pensé dans ses rapports au raisonnement et à la preuve. »
(*CREM, rapport d'étape sur le calcul, p16*)

« L'entrée dans le monde algébrique est étroitement reliée à la résolution d'équations et d'inéquations associées à diverses situations dites de vie quotidienne ou purement mathématiques. La fonction du calcul algébrique comme outil de généralisation et de preuve est mal assumée. Il nous semble tout à fait essentiel de mettre mieux en évidence la fonction généralisatrice du calcul algébrique et sa valeur d'outil de preuve. Ceci peut se faire tôt avec des situations très simples, en se limitant aux objets familiers à l'élèves… »
(*CREM, rapport d'étape sur le calcul, p30*)
Les pistes tracées par la CREM pour remédier aux dysfonctionnements qu'elle pointe :

- Faire percevoir la puissance que donne le calcul algébrique (résoudre, formuler, généraliser, prouver)
- Faire comprendre que le calcul algébrique n'est pas aveugle, qu'on en possède des modes de contrôle
- Développer l'intelligence de calcul (reconnaissance et choix de formes, calcul mental et réfléchi)
- Intégrer visiblement l'algèbre dans le domaine de la rationalité

Conclusion :

« Pour atteindre une efficacité satisfaisante, l'enseignement de l'algèbre ne peut se réduire à une pratique techniciste confinée à l'intérieur de quelques chapitres isolés de la progression annuelle. Il doit au contraire faire clairement apparaître aux élèves que l'entrée dans le domaine algébrique marque une rupture importante, définitive et omniprésente. L'aspect outil très puissant de l'algèbre pour calculer mais aussi pour raisonner permettra de faire accepter aux élèves l'effort important qui s'avère nécessaire pour surmonter cette rupture. »

ANNEXE 4

Autres citations du rapport sur le calcul de la commission Kahane

V.1 LA RÉVOLUTION DU CALCUL ALGÉBRIQUE

Le passage du calcul numérique au calcul algébrique constitue en effet une véritable révolution. Le fait de désigner une quantité : inconnue, variable, indéterminée, par une lettre et d'engager cette lettre dans les calculs au même titre que les quantités connues, accroît radicalement les potentialités du calcul. L'histoire des mathématiques l'atteste, comme elle atteste le temps qu'a nécessité la mise au point de ce calcul sous les formes qui nous semblent aujourd'hui « naturelles » : écriture littérale parenthésée, notations homogènes pour l'inconnue et ses puissances…, comme le montre dans sa thèse M. Serfati [31]. L'élève n'est pas immédiatement sensible à la puissance mathématique que lui confère ce calcul, et ce d'autant plus qu'il ne le manipule pas de façon sûre. La méthode algébrique l'oblige à réviser profondément ses stratégies de calcul : en arithmétique il progressait du connu vers l'inconnu, en produisant pas à pas des résultats intermédiaires. En algèbre, il s'agit pour lui d'établir des relations entre connu et inconnu, puis de calculer sur ces relations jusqu'à obtenir le résultat cherché. Il y a là un renversement de pensée dont l'enseignement sous-estime souvent la difficulté[3], en pensant qu'il suffit d'en montrer le fonctionnement à l'élève dans quelques cas (où souvent il ne s'impose d'ailleurs pas)[4] pour que sa nécessité s'impose. Parallèlement, les modes de contrôle de ce calcul sont profondément modifiés. Le calcul arithmétique était piloté par le sens du contexte, chacune des opérations effectuées pouvait s'y exprimer. Le calcul algébrique tire sa puissance de sa capacité à s'affranchir de ce sens « externe » et d'asseoir la légitimité des transformations effectuées sur des règles formelles. Ceci impose un pilotage du calcul différent, faisant intervenir le sens interne des expressions. Certes, une large partie de ce calcul, notamment celui lié à la résolution exacte d'équations et d'inéquations va rapidement s'algorithmiser, mais les erreurs récurrentes des élèves montrent bien la difficulté qu'ils rencontrent à maîtriser ce calcul, même lorsqu'il s'automatise, faute d'en contrôler le sens. Contrôler ce calcul impose de comprendre les règles qui gouvernent la formation et le traitement des expressions algébriques, et se démarquer d'une lecture de gauche à droite que la résolution des tâches arithmétiques ordinaires ne mettait généralement pas en défaut. La représentation d'expressions sous forme de schémas, d'arbres (cf. par exemple [32]), l'association de programmes de calcul à des expressions, la comparaison de tels programmes sont ici des activités décisives[5]. Quelques recherches récentes (cf. par exemple [23]) montrent aussi que l'utilisation de logiciels de calcul formel peut utilement appuyer un travail sur la syntaxe des expressions algébriques[6]. L'intérêt

---

[3] Les enseignants débutants éprouvent des difficultés certaines à comprendre le renversement de pensée demandé à l'élève, eux qui ont le plus grand mal au contraire à réinventer des solutions arithmétiques. C'est le cas par exemple avec le problème suivant, que nous avons utilisé dans diverses formations : « les élèves d'une classe veulent se cotiser pour acheter un ballon de football à un de leurs camarades. Ils calculent que chacun doit payer 20F. Au dernier moment, trois élèves ne paient pas et les autres doivent payer chacun 5F de plus. Combien coûte le ballon ? » La solution arithmétique consistant à dire qu'il manque 60F et donc qu'il reste 12 élèves puisque 5x12=60, qu'il y a donc initialement 15 élèves et que le ballon coûte 300F n'apparaît jamais spontanément.

[4] C'est le cas par exemple avec les problèmes qui se traduisent directement par une équation de la forme : ax+b=c, comme le problème suivant : « On pense à un nombre, on le multiplie par 5 et on ajoute 3 au résultat. On obtient alors : 48. A quel nombre a-t-on pensé ? ». La stratégie naturelle à l'élève pour résoudre un tel problème consiste à partir du résultat et inverser les opérations pour récupérer le nombre de départ. Ce n'est plus possible, en revanche, si l'on transforme le problème initial de la façon suivante : « Deux élèves choisissent en commun un nombre. Le premier le multiplie par 5 et ajoute trois au résultat. Le second le multiplie par 8 et ajoute 1 au résultat. Ils constatent alors qu'ils ont de nouveau le même nombre. Peut-on trouver le nombre qu'ils avaient choisi ? », puisqu'il ne connaît ni le nombre de départ, ni celui d'arrivée.

[5] On pourra se référer aux travaux de l'IREM de Strasbourg qui ont largement exploité des tâches de ce type [33]. Les comparaisons entre programmes menées sur la base d'entrées / sorties numériques permettent de montrer que des formulations en apparence voisines peuvent avoir des effets numériques très différents et qu'au contraire des formulations très différentes peuvent conduire à des systèmes équivalents, la preuve de cette équivalence étant ensuite du ressort d'un calcul symbolique.

[6] Un travail avec des calculatrices peut aussi bien sûr le permettre avec des moyens plus réduits. Il nous semble cependant nécessaire, pour que ce travail soit efficace et gérable par l'enseignant, que les calculatrices utilisées disposent d'un éditeur d'expressions qui permet de relire ce qui a été introduit.

d'un tel travail est ordinairement mal perçu par les élèves en environnement papier/crayon, il apparaît ici comme nécessité par la communication avec le logiciel. D'autre part, il peut aider à distinguer ce qui, dans la formation des écritures relève de règles mathématiques et ce qui relève de conventions d'écritures (non nécessairement respectées par le logiciel).

Faire comprendre la puissance mathématique que donne le calcul algébrique, faire comprendre que, tout en ayant des modes de contrôle différents du calcul arithmétique, le calcul algébrique n'est pas un calcul aveugle, constituent des enjeux fondamentaux pour l'enseignement du calcul dans la scolarité obligatoire. Les diverses évaluations à grande échelle existantes[7] comme les travaux de recherche montrent cependant que, pour beaucoup d'élèves, ces prises de conscience, sans doute insuffisamment préparées[8], ne se font pas. Le calcul algébrique est affaire de contrat didactique et les dérapages formels y abondent.

V.2 L'INTELLIGENCE DU CALCUL ALGEBRIQUE

Ce qui précède nous conduit naturellement au second point que nous souhaitons aborder : celui de l'intelligence du calcul. Le calcul algébrique, calcul sur des relations, l'impose dès qu'il n'est pas automatisé, car il est très facile d'y tourner en rond. Cette intelligence va nécessiter un pilotage au sens des expressions manipulées, la reconnaissance de formes : formes factorisées, développées, formes canoniques, identités remarquables, configurations clefs... , chacune portant des informations spécifiques sur l'objet qu'elle désigne, rapprochant ou éloignant de la solution cherchée. Il y a là, sous-jacentes, des capacités de visualisation tout à fait analogues à celles évoquées dans le rapport sur la géométrie, et la connaissance d'un répertoire de formes, prolongeant le répertoire nécessaire à un calcul numérique raisonné, que nous avons déjà évoqué. Développer cette intelligence suppose bien sûr que l'on propose à l'élève des tâches de calcul qui ne soient pas complètement balisées, où il conserve une certaine autonomie, où des choix restent possibles. Ceci suppose aussi un minimum de complexité technique. Nous en donnerons en annexe quelques exemples. Ces exemples montreront également comment l'intelligence du calcul algébrique peut-être utilement soutenue par des visualisations, des traductions dans un autre cadre, en particulier les cadres géométriques et fonctionnels.
Il nous semble que l'enseignement aujourd'hui n'est pas suffisamment ambitieux à ce niveau. Même si l'on peut penser qu'à terme, le calcul algébrique sera, pour les élèves, assisté comme l'est aujourd'hui le calcul numérique, le pilotage et le contrôle économique de ce calcul assisté nécessiteront justement une intelligence du calcul algébrique que l'enseignement peine aujourd'hui à développer.

V.3 LE CALCUL ALGÉBRIQUE, OUTIL DE GENERALISATION ET DE PREUVE

Dans notre culture, l'entrée dans la rationalité mathématique est pensée en référence au raisonnement géométrique. Ceci n'est pas sans conséquence sur l'enseignement du calcul algébrique. L'entrée dans le monde algébrique est étroitement relié à la résolution d'équations et d'inéquations associées à diverses situations dites de vie quotidienne ou purement mathématiques. La fonction du calcul algébrique comme outil de généralisation et de preuve est mal assumée[9]. Il nous semble tout à fait essentiel de mettre mieux en évidence la fonction généralisatrice du calcul algébrique et sa valeur d'outil de preuve. Ceci peut se faire tôt avec des situations très simples, en se limitant aux objets familiers à l'élève que sont les nombres entiers. L'infinité des cas possibles y est sans aucun doute plus immédiatement sensible qu'en géométrie, le travail sur exemples et contre-exemples en est facilité. On peut viser des propriétés de divisibilité comme dans les cas classiques suivants : « le produit de trois nombres entiers consécutifs est-il pair ? est-il un multiple de 4 ? un multiple de 6 ? » ou le repérage d'une régularité numérique surprenante, comme dans la situation suivante : « choisis deux nombres dont la somme est 300 et fais leur produit. Ajoute 7 à chacun d'eux, de combien augmente le produit ? ». Le calcul algébrique sur une expression à deux variables va ici permettre de prouver que l'accroissement est constant. Il est d'ailleurs ici tout à fait intéressant de visualiser géométriquement ce calcul, en juxtaposant les deux rectangles de largeur 7 unités et pour former un rectangle de 7 unités sur 300 unités. Les élèves peuvent à leur tour fabriquer sur ce moule une infinité de problèmes, justiciables de traitements algébriques analogues et les expliciter. Deux autres exemples (la situation du

---

[7] Evaluations de la DPE, évaluations APMEP, enquêtes internationales

[8] Un article comme celui de J.C. Duperret et J.C. Fenice [34], publié dans la revue Repères IREM, des travaux comme ceux de B. Grugeon, dont une synthèse est présentée dans [35], donnent une bonne idée de la diversité des tâches à prendre en compte pour assurer une telle préparation.

[9] Nous avons souvent constaté qu'elle n'est spontanément citée que par une minorité de professeurs stagiaires en réponse à la question : « A quoi sert l'algèbre ? » et qu'elle est particulièrement sous-représentée dans les activités qu'ils proposent aux élèves.

quadrilatère qui tourne et celle de la bille) sont donnés en annexe, ils mobilisent cette fois le calcul algébrique dans le cadre fonctionnel, et des visualisations de type graphique ou géométrique.

V.4 CALCUL ALGÉBRIQUE ET FORMULES

Par rapport à d'autres formes du calcul algébrique, le travail sur les formules joue un rôle tout à fait mineur dans l'enseignement obligatoire alors que, pour beaucoup d'élèves, en particulier ceux qui s'orienteront vers l'enseignement professionnel, c'est via l'usage de formules que vivra souvent le calcul algébrique. Nous voudrions souligner dans ce rapport l'intérêt mathématique du travail sur les formules, au-delà de sa nécessité évidente si l'on veut que s'établissent des rapports satisfaisants avec les autres disciplines scientifiques ou technologiques, sur laquelle nous n'insisterons pas davantage.

Le travail sur les formules, qu'il s'agisse d'exploiter des formules données, ou d'en élaborer, permet une première entrée dans le calcul littéral, sans mettre en jeu nécessairement tous les renversements de pensée, de modes de contrôle que nous avons évoqués plus haut. Mais, néanmoins, il ne se situe pas complètement dans la continuité des pratiques antérieures. La lettre cesse d'avoir pour seul statut celui d'étiquette, de marque d'unité dans un calcul sur les grandeurs, elle devient représentant d'un nombre quelconque, engagée dans les calculs au même titre que le nombre qu'elle représente. Il y a là une évolution essentielle et, en même temps, un moyen de faire sentir à l'élève la puissance du calcul algébrique, dans une perspective complémentaire de celle ouverte par l'approche en termes d'équations et d'inéquations : il intervient ici comme outil au service de la généralisation. Ce travail peut être engagé relativement tôt comme le montrent diverses recherches, et a intérêt à ne pas être limité à un travail de lecture et d'exploitation de formules, même si ce dernier est essentiel. Le travail de production de formules, associé par exemple à des situations de dénombrement, est sans doute nécessaire pour ressentir en quoi consiste cette démarche de généralisation par passage au littéral et la puissance que nous donne le calcul algébrique, une fois la formule établie.[10] En fait, ce qui est en germe ici, c'est la pensée fonctionnelle et le calcul associé.

L'intérêt du travail sur les formules se situe également ailleurs. Le calcul algébrique, tel qu'il est perçu traditionnellement, en mathématiques dans le secondaire, comporte peu de variables quand il porte sur des équations et inéquations et se réduit à un calcul à une variable quand il est fonctionnel. Pourtant les situations, en particulier celles issues de la vie ordinaire ou des autres disciplines qu'on se donne l'objectif de modéliser, sont rarement des situations dépendant d'une seule variable. Le travail sur les formules doit permettre de contrer dès le début ce réductionnisme, en permettant de travailler aussi sur des situations où interviennent simultanément plusieurs variables, plusieurs formes de dépendance.

Nous avons centré notre réflexion sur les débuts du calcul algébrique et les enjeux associés pour l'enseignement. Ce calcul va rapidement s'étendre à de nouveaux objets : fonctions, polynômes et fractions rationnelles, vecteurs… Le calcul sur les fonctions, exact mais aussi approché, fera l'objet du paragraphe suivant […]

[10] L'ouvrage publié par l'INRP « Les débuts de l'algèbre au collège » ([36]) analyse de ce point de vue les potentialités de la situation suivante (adaptée au début du collège) : on borde un carré de côte 6cm extérieurement par des petits carrés de côté 1cm. Combien faut-il des petits carrés ? Et si le carré initial a 15 cm de côté ? 100cm de côté ? Peut-on trouver une formule qui permettrait de calculer dans tous les cas le nombre de petits carrés ? ». Dans une situation comme celle-là, les premiers calculs servent à donner sens à la recherche, le saut à 100cm à disqualifier le comptage basé sur un dessin intégral et à susciter le besoin de procédures de comptage. Malgré la simplicité du problème, diverses procédures de comptage sont possibles et apparaissent effectivement dans une classe. Elles peuvent être contrôlées géométriquement mais l'équivalence des formules peut aussi être testée numériquement ou justifiée formellement. La formule peut ensuite être exploitée à la fois pour trouver des valeurs particulières mais aussi pour se demander si tel ou tel nombre est accessible et, pourquoi pas, chercher à caractériser tous les nombres qui sont solution d'un tel problème.

ANNEXE 5

Idée de tableau à compléter en balayant le programme dans les quatre parties

- Organisation et gestion de données, fonctions
- Nombres et calcul
- Géométrie
- Grandeurs et mesure

Dans le programme	Classe	Notion	Situations[11] pour construire du sens
« Endroits » du programme qui offrent l'occasion de préparer le passage du numérique à l'algébrique			
« Endroits » où on met en place le calcul algébrique			
Justifications de résultats de cours sur des exemples			
Démonstrations de résultats de cours dans les champs numérique et algébrique			
« Endroits » où le calcul algébrique sert à démontrer des résultats de cours			

[11] Par exemple : « Le carré bordé » dans « Les débuts de l'algèbre au collège » de G. Combier, J. C. Guillaume et A. Pressiat.