

Le calcul : du calcul numérique au calcul littéral

Le calcul est souvent opposé au raisonnement, il renvoie à une activité mécanique et son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. Avec les nouveaux instruments, il ne resterait plus rien à apprendre !

Le raisonnement est associé à la résolution de problèmes et à la démonstration. Si l'on interroge des professeurs sur la fonction de l'algèbre au collège, rarement la fonction d'outil de démonstration est évoquée.

Il y a donc à lutter contre cette vision réductrice du calcul.

Le calcul s'effectue sous différentes formes :

Le calcul mental :

Actuellement, sa pratique est obligatoire à l'école primaire et si elle est maintenue en 6^{ème}, elle tend à disparaître au fil des ans. Cependant elle a toute sa place à tous les niveaux du collège et jusqu'au lycée.

Modalités :

La question est posée soit oralement, soit par écrit. Le temps de recherche est limité et l'élève n'a qu'une réponse à écrire, parfois même seulement « vrai » ou « faux ».

Des séquences d'une dizaine de questions sont proposées en tant qu'évaluation diagnostique ou formatrice ou sommative. Une séquence ne dure qu'une quinzaine de minutes, correction comprise.

Cette pratique se déroule avec la participation de tous les élèves et remporte l'adhésion de tous quelle que soit par ailleurs leurs performances.

Compétences développées par le calcul mental :

Etre en mesure de prévoir un ordre de grandeur

Contrôler les résultats d'un calcul écrit ou avec la calculatrice a posteriori

Travailler sur les différentes écritures d'un nombre, enrichir la vision des nombres en construisant des représentations mentales adaptées au calcul proposé, par exemple $\frac{1}{2} = 0,5$, $0,25 = \frac{1}{4}$, $20\% = \frac{1}{5} = 0,20$... Enrichir ainsi le catalogue des images mentales des nombres,

Faciliter la mémorisation d'un répertoire de résultats et entretenir des automatismes opératoires pour libérer la pensée qui est alors disponible pour d'autres tâches

Travailler sur la numération : pour une somme, ajouter les dizaines puis les unités

Contribuer à l'appropriation des propriétés calculatoires et participer à la maîtrise du calcul littéral : la distributivité en 5^{ème} a déjà été rencontrée lors du calcul d'un produit par 19 ou par 51 de même les règles avec les puissances, 30^2 et $(ab)^2$

Mémoriser un répertoire de formes, par exemple les identités remarquables ; en cours d'apprentissage, les élèves se trouvent obligés d'apprendre à faire en une étape au lieu de développer pas à pas. Cette mémorisation allège la charge de travail lors d'exercices plus complexes comprenant ces calculs élémentaires,

Multiplier les rencontres avec les « exercices-erreurs » : $- 2^2$ et $(- 2)^2$, la résolution de $2x = 0$... C'est l'occasion d'une reprise, de revoir avec les élèves, peut être avec de nouveaux outils, le raisonnement à conduire,

Formuler oralement peut favoriser la compréhension, par exemple : deux tiers plus cinq tiers

Exiger une lecture et une écoute rigoureuse, le carré de la somme de a et b ou a plus b au carré ?

Effectuer un calcul réfléchi : Il demande d'abord l'évocation rapide de procédures souvent multiples puis l'estimation de leur pertinence en fonction des nombres proposés et enfin de choisir et d'exécuter.

Du calcul mental au calcul écrit,

La correction d'un calcul mental peut se faire par passage à l'écrit.

L'écrit peut rendre compte de l'organisation mentale du calcul. Très souvent les élèves pensent qu'une seule procédure est bonne, c'est l'occasion lors de la correction de montrer les différentes possibilités.

L'écrit vient au secours de la mémoire pour l'élève qui veut s'entraîner ou retrouver une procédure.

Le calcul posé :

Mis en place à l'école primaire, il se doit d'être entretenu au collège. Souvent, les professeurs, par manque de temps, réduction horaire entre autres le délaissent. Cependant, de nombreux exemples montrent qu'il contribue lui aussi au raisonnement.

Intérêts du calcul posé :

Entretenir le sens de la position des chiffres dans l'écriture des nombres,
Travailler le sens avant d'installer un automatisme ou reprendre leur justification.

Le calcul instrumenté :

Utilise ou ne pas utiliser les instruments de calcul est une question qui ne se pose pas. L'évolution technologique perturbe les équilibres traditionnels du calcul dans l'enseignement et une réflexion doit être engagée.

Sans réelle intégration dans le cours de mathématiques, les élèves maîtrisent très peu ces objets et dans ces conditions, leur usage ne sert ni le développement du calcul, ni l'articulation entre calcul et raisonnement.

L'apprentissage de leur utilisation ne peut être entièrement laissé à la charge de l'élève

Il semble nécessaire que les élèves disposent d'un mode d'emploi spécifique au modèle de leur calculatrice et rédigé en fonction des programmes du collège, celui du fabricant est bien souvent inaccessible aux élèves ou au moins difficile à utiliser. Des exercices d'entraînement doivent également être proposés et les compétences acquises se doivent d'être évaluées.

Tout apprentissage a un coût et les élèves n'y consentiront que s'ils en voient le gain. L'intérêt de son utilisation apparaît lors de certaines activités, elle permet entre autres de :

Libérer de la charge du calcul la recherche d'un problème.

Valoriser des recherches par essais et erreurs. L'instrumentation du calcul va permettre à certains d'accéder à un travail mathématique qui serait impossible sans cette assistance.

Utiliser les performances de la calculatrice pour donner du sens à des notions au programme, les priorités opératoires...

Si l'utilisation de la calculatrice doit être développée, elle doit s'accompagner d'une étude critique, elle a en effet des limites !

Un autre objet pour instrumenter le calcul : le tableur.

Puissant outil de calcul, son utilisation en classe avec un vidéo projecteur, dès la classe de 6^{ème} ou en salle d'informatique va permettre de résoudre de nouveaux problèmes ou de montrer des calculs non envisageables autrement.

Tout comme la calculatrice, il peut permettre d'émettre des conjectures et par la suite, motiver la démonstration d'une formule. La mise en place dans le tableur des formules est un premier pas vers l'écriture littérale, étape qui précède le calcul littéral.

Calcul exact ou calcul approché ?

Le calcul approché n'a pas à être présenté comme ce à quoi on est réduit quand on ne peut faire le calcul exact. Ces deux calculs ne sont pas à mettre en opposition et de plus il n'y a pas de hiérarchie à établir entre les deux. Le travail sur l'algèbre met l'accent sur le calcul exact alors que les exercices avec les puissances de 10, par exemple avec la physique vont valoriser le calcul approché.

Ils peuvent être du calcul mental ou écrit ou même instrumenté, c'est le type de problème posé qui permet de définir le calcul le mieux approprié.

Renforcer les rapports avec calcul et raisonnement, développer l'intelligence du calcul sont des objectifs qui ne peuvent être atteints qu'avec un minimum de mémorisations et d'automatismes.

Un usage réfléchi de tous les modes de calcul doit être assuré tout au long du collège tant ils sont complémentaires les uns des autres et accompagnent la mise en place du calcul littéral.

Introduction pour le collège (1996)

Introduction pour la classe de sixième

II – Organisation de l'enseignement

D.

...Le travail effectué permet aussi à l'élève d'acquérir et de parfaire l'usage d'instruments de mesure et de dessin, de développer le calcul mental et l'utilisation rationnelle des calculatrices de poche, de s'initier très progressivement au raisonnement déductif...

Contenus pour la classe de sixième

2. Travaux numériques

...Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché, sous différentes formes : le calcul mental, le calcul à la main (dans le cas de nombres courants et d'opérations techniquement simples), l'emploi d'une calculatrice.

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
2.1 Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations <ul style="list-style-type: none">Techniques opératoiresProcédés de calcul approché : troncature et arrondi ; ordre de grandeur d'un résultat.	<ul style="list-style-type: none">Addition, soustraction et multiplication : savoir effectuer ces opérations sous les trois formes de calcul (mental, à la main, à la calculatrice), dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique.Prendre l'arrondi à l'unité ou la troncature. Proposer des ordres de grandeur de deux nombres et les utiliser pour donner un ordre de grandeur de leur somme et, éventuellement, pour contrôler un calcul sur machine.	<p>Les procédés de calcul approché trouveront un développement naturel dans le calcul mental et dans l'usage des calculatrices. On apprendra notamment à prévoir et à contrôler des calculs à la machine par des calculs mentaux approchés.</p>

Accompagnement du programme de 6^e

I – Conception générale de l’enseignement

E. Place des calculatrices et de l’informatique

1. Calculatrices

... On mettra donc en place des situations :

- qui nécessitent un contrôle notamment au niveau de l’ordre de grandeur ;
- qui rendent commode l’utilisation de la mémoire et des opérateurs constants ;
- qui conduisent à calculer mentalement.

Dans ce contexte, le calcul mental portant sur les nombres inférieurs à 100 reste une nécessité. On visera en particulier la maîtrise des tables de multiplication, de l’addition des petits nombres et des relations arithmétiques entre les nombres notamment les multiples de 2, 3, 4, 5, 10, 12,15 (par exemple 60 c’est 3×20 ou 4×15 ou 6×10 ou 5×12 , etc.).

...

V – Activités numériques

A. Calcul mental et ordre de grandeur

Les activités d’estimation et de recherche d’un ordre de grandeur sont fondamentales. Elles prennent de plus en plus d’importance avec l’utilisation de calculatrices. Elles sont associées au regard critique qu’il est nécessaire de porter sur tout calcul. Anticiper la taille d’un résultat par une estimation et se poser chaque fois la question de la vraisemblance des résultats obtenus doivent devenir des préoccupations constantes pour les élèves.

La résolution de problèmes numériques et, plus tard, le calcul algébrique, supposent une bonne maîtrise des relations arithmétiques entre les nombres inférieurs à 100. Le professeur entretiendra donc les acquis de l’école élémentaire et conduira de nombreuses activités de calcul mental pour améliorer les performances des élèves dans ce domaine.

Introduction pour le cycle central

Contenus pour la classe de cinquième

B. Travaux numériques

... Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché, sous différentes formes souvent complémentaires : le calcul mental, le calcul à la main (dans le cas de nombres courants et d’opérations techniquement simples), l’emploi d’une calculatrice. ...

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
1. Enchaînement d’opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs Conventions de priorités entre opérations.	- Organiser, pour l’effectuer mentalement, avec papier-crayon ou à la calculatrice, une succession d’opérations au vu d’une écriture donnée, de la forme $a + bc, a + \frac{b}{c}, \frac{a}{b+c}, \frac{a+b}{c}, a/(b/c),$...	

2.2 Nombres en écriture fractionnaire

Multiplication

- Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.

Toutes les activités numériques fourniront des occasions de pratiquer le calcul mental et d'utiliser une calculatrice. Plusieurs objectifs sont visés, en particulier développer la capacité à :

- prévoir les ordres de grandeur,
- opérer en conservant l'écriture fractionnaire,
- utiliser le vocabulaire approprié (terme, facteur, numérateur, dénominateur),
- contrôler des résultats par des calculs mentaux approchés.

Contenus pour la classe de quatrième

B. Travaux numériques

... La pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a pour objectifs :

- la maîtrise des règles opératoires de base ;
- l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres ;
- la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre selon la situation.

...

Contenus

Compétences exigibles

Commentaires

Accompagnement des programmes du cycle central

Première partie

Nombres et calcul numérique

... Les commentaires du programme insistent sur le maintien, tout au long du collège, de l'entraînement à la pratique des diverses opérations à la main, mentalement et à la machine. En particulier, le calcul mental permet la consolidation de connaissances, dont celle des tables de multiplication, ainsi que le contrôle de l'utilisation de la calculatrice, en déterminant l'ordre de grandeur du résultat.

...

Deuxième partie

Calculatrices

Les nouveaux programmes proposés pour le collège font apparaître la nécessité d'un travail avec des calculatrices, tout en veillant à ce que chacun acquière des connaissances suffisantes en calcul écrit et mental.

...

La calculatrice est un objet courant et une utilisation optimale nécessite un apprentissage sur plusieurs points, notamment :

...

- le contrôle des ordres de grandeur (le contrôle des ordres de grandeur et de la vraisemblance des résultats peut se faire à l'aide du calcul mental).

Contenus pour la classe de troisième

B. Travaux numériques

... La pratique du calcul numérique exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a les mêmes objectifs que dans les classes antérieures :

- maîtrise des règles opératoires de base,
- acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres,
- réflexion et initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre selon la situation.

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
4. Nombres entiers et rationnels Fractions irréductibles	Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. ...

Accompagnement du programme de 3^e

B. Calcul numérique

... Il convient ici de souligner que, dans toutes les activités, la pratique du calcul mental doit être prédominante. Ainsi pour passer de la forme $3 + \frac{2}{7}$ à la forme $\frac{23}{7}$, les élèves devraient être capables de fournir la réponse directement, sans passer par la forme $\frac{3}{1}$ pour exprimer le nombre 3 et sans écrire explicitement les deux fractions avec le même dénominateur. De la même façon, la réduction d'une écriture comme $\frac{36}{48}$ doit pouvoir être réalisée rapidement (en une ou deux étapes) sans recourir à des décompositions explicites de 36 et 48 en facteurs premiers, ni à un algorithme pour calculer le PGCD de deux nombres : l'utilisation consciente de la seule égalité $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ (éventuellement plusieurs fois) est suffisante.

...

Introduction pour le collège (2005)

II – Organisation des contenus

B – Nombres et calcul

...

- poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté ;

- ...

Introduction pour la classe de sixième

Le programme de la classe de sixième a pour objectifs principaux :

...

• dans la partie « nombres et calculs » :

- de développer le calcul mental et l'utilisation rationnelle des calculatrices ;

- ...

• ...

Contenus pour la classe de sixième

2. Nombres et calculs

... Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché sous ses différentes formes, souvent utilisées en interaction : calcul mental automatisé ou réfléchi, calcul posé ou instrumenté. A la suite de l'école primaire, le collège doit, en particulier, permettre aux élèves d'entretenir et de développer leurs compétences en calcul mental, ces compétences étant indispensables dans de nombreux domaines...

Contenus	Compétences	Exemples d'activités, commentaires
----------	-------------	------------------------------------

<p>2.1 Nombres entiers et décimaux</p> <ul style="list-style-type: none"> Opérations : addition, soustraction et multiplication. 	<ul style="list-style-type: none"> - Connaître les tables d'addition et de multiplication et les résultats qui en dérivent. - Savoir effectuer ces opérations sous les diverses formes de calcul : mental, posé, instrumenté. 	<p>La maîtrise des tables est consolidée par une pratique régulière du calcul mental sur des entiers et des décimaux simples.</p> <p>La maîtrise des différents moyens de calcul doit devenir suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes, l'élève étant capable de faire le choix du moyen de calcul le plus approprié dans une situation donnée...</p> <p><u>La capacité à calculer mentalement est une priorité et fait l'objet d'activités régulières.</u></p>
<p>2.2 Division, quotient</p> <ul style="list-style-type: none"> Division euclidienne Ecriture fractionnaire Extension aux nombres décimaux 	<ul style="list-style-type: none"> - Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté). - Multiplier un nombre entier ou décimal par un quotient de deux entiers sans effectuer la division. - Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre. - Calculer un quotient décimal de deux nombres entiers ou d'un décimal par un entier, dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté). 	<p>Dans ce domaine également, le calcul mental (en particulier approché) constitue l'objectif prioritaire.</p> <p>Les élèves doivent être entraînés à effectuer mentalement des calculs utilisant les expressions double/moitié, triple/tiers, quadruple/quart, sur des nombres entiers ou décimaux simples.</p> <p>Le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre est mis en évidence et utilisé. La connaissance des tables de multiplication est notamment exploitée à cette occasion.</p>
<p>Introduction pour le cycle central</p>		
<p>Le programme du cycle central du collège a pour objectifs principaux :</p> <p>...</p> <ul style="list-style-type: none"> dans la partie « nombres et calcul » : <ul style="list-style-type: none"> - de poursuivre la pratique du calcul mental et l'utilisation rationnelle des calculatrices ; - 		
<p>Contenus pour la classe de cinquième</p>		
<p>2. Nombres et calculs</p> <p>... Toutes les activités numériques fournissent des occasions de pratiquer le calcul exact ou approché sous toutes ses formes, utilisées en interaction : calcul mental automatisé ou réfléchi, calcul posé, emploi d'une calculatrice. A travers ces activités, plusieurs objectifs sont visés, en particulier ceux qui contribuent au développement des capacités à :</p> <p>...</p> <ul style="list-style-type: none"> contrôler ou anticiper des résultats par des calculs mentaux approchés. <p>L'entretien et le développement des compétences en calcul mental sont indispensables, ces compétences étant nécessaires dans de nombreux domaines...</p>		
Contenus	Compétences	Exemples d'activités, commentaires

<p>2.1 Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Enchaînement d'opérations 	<ul style="list-style-type: none"> - Effectuer une succession d'opérations données sous diverses formes (par calcul mental, posé ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques. 	
<p>2.2 Nombres positifs en écriture fractionnaire : sens et calculs</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comparaison 	<ul style="list-style-type: none"> - Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre. 	<p>Différentes procédures sont mises en œuvre dans le cas où le dénominateur et le numérateur sont différents :</p> <ul style="list-style-type: none"> - ... - mise au même dénominateur (dans des cas accessibles par le calcul mental) ; - ...

Contenus pour la classe de quatrième

2. Nombres et calculs

... La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a pour objectifs :

- la maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées,
- l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres,
- la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation.

...

Contenus	Compétences	Exemples d'activités, commentaires
<p>2.1 Calcul numérique</p> <ul style="list-style-type: none"> • Opérations (+, -, ×, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée). 	<ul style="list-style-type: none"> - Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire. 	<p>L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire demande un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers dans des cas où un calcul mental est possible.</p> <p>...</p>

Contenus pour la classe de troisième

2. Nombres et calculs

... La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a les mêmes objectifs que dans les classes antérieures :

- maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées,
- acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres,
- réflexion et initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation.

...

Contenus	Compétences	Exemples d'activités, commentaires
<p>2.1 Nombres entiers et rationnels</p> <ul style="list-style-type: none"> Fractions irréductibles 	<p>- Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.</p>	<p>La connaissance de relations arithmétiques entre nombres que la pratique du calcul mental a permis de développer permet d'identifier des diviseurs communs au numérateur et au dénominateur.</p>
<p>2.3 Ecritures littérales</p> <ul style="list-style-type: none"> Puissances 	<p>- Connaître dans le cas général et utiliser sur des exemples les égalités :</p> $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $a^m / a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $(a/b)^n = a^n / b^n$ <p>où a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers relatifs.</p>	<p>La mémorisation de ces égalités est favorisée par l'entraînement à leur utilisation en calcul mental.</p>