Grandeurs et mesures

Malgré des affirmations en plaidoyer dans les programmes, un certain oubli de fait des grandeurs en classe de Mathématiques.
Partant de grandeurs quand la chose se présente (ce qui n'est pas toujours le cas), on se hâte de passer aux nombres, on travaille sur des nombres, pour ne revenir qu'en fin de parcours aux grandeurs.

La question des unités

En classe de mathématiques, les objets supports des grandeurs (une règle de telle longueur, un vase de telle capacité, …) sont évoqués, mais ne sont pas amenés dans la classe pour y être exploités (sauf exception).

Les grandeurs pourraient y être aisément présentes sous la forme de "nombres concrets" :
15 km est une longueur,
50 km/h est une vitesse, …
Or *les unités - et donc les grandeurs - y disparaissent*, et ceci depuis longtemps.
Exemple:
En 6e, il s'agit de déterminer combien il y a de minutes dans une demi-heure, dans un quart d'heure, dans un cinquième d'heure.

Les traces écrites d'un élève au tableau sont les suivantes :
$\frac{1}{2} = 30\text{ min} \quad \frac{1}{4} = 15\text{ min} \quad \frac{1}{5} = 12\text{ min}$

Le professeur commente la solution de l'élève, mais ne la corrige pas. Il est pourtant clair que ces égalités ne sont pas correctes *:*
le ***nombre*** 1/5 (= 0,2) ne saurait être égal à la ***durée*** 12 min, pas davantage que 12 cm n'est égal à 12 kg. Les écritures correctes auraient été simplement :
$\frac{1}{2}\text{ h} = 30\text{ min} \qquad \frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{ min} \qquad \frac{1}{5}\text{ h} = 12\text{ min}$

On sait pourtant qu'il s'agit là aujourd'hui d'une pratique dominante, à propos de laquelle les professeurs manquent des informations appropriées ou hésitent à les mettre en oeuvre.

Tel manuel de mathématiques de 5e commence ainsi fort à propos par indiquer les normes de l'AFNOR (Association française de normalisation) en la matière :
Il est tout à fait autorisé d'écrire : 1,825 km = 1 825 m ou encore 2 m x 3,5 m = 7 m^2 .
Mais les auteurs reprennent dans un exercice l'usage traditionnel :
aire de base A_2 = (6 x 6) : 2 = 18 cm^2
aire de base A_3 = 72 – 18 = 54 cm^2
V_2 = 18 x 12 = 216 cm^3
V_3 = 864 – 216 = 648 cm^3
Technique de calcul bien installée en France dans la classe de sciences physiques (oubli des unités dans les calculs intermédiaires).
L'absence ou la raréfaction des unités pose un problème majeur : celui du ***changement d'unités***.

D'après la conférence d'André PRESSIAT, journées inter-académiques décembre 2004, La Grande Motte

La technique généralement mise en place, illustrée sur l'exemple suivant, extrait d'un manuel de 3e, est fort complexe et peu fiable.

Convertir les unités de grandeurs composées

Méthode : Convertir successivement les unités des deux grandeurs

Exemple : Convertir 1,25 g/cm^3 en kg/m^3

Réponse :

– On convertit l'unité de masse : 1,25 g = 0,001 25 g

donc 1,25 g/cm^3 = 0,001 25 kg/cm^3.

– On convertit l'unité de volume : 1 m^3 = 1 000 000 cm^3.

0,001 25 × 1 000 000 = 1 250

donc 0,001 25 kg/cm^3 = 1 250 kg/m^3.

– On conclut : 1,25 g/cm^3 = 1 250 kg/m^3.

Par contraste avec cette technique "abstraite", voici une technique "concrète" qui consiste à calculer ***avec les unités***, c'est-à-dire ***sur des nombres "concrets"***.
Le fait mathématique essentiel est le suivant : les ***durées*** constituent un demi-***espace vectoriel de dimension* 1 *sur* R.**
Le problème posé aux élèves est exactement un problème ***de changement de base***.
La durée qui a pour coordonnée 1/5 dans la base {h} a pour coordonnée 12 dans la base {min} : 1/5 h = 12 min.

$$\frac{1}{5}\text{ h} = \frac{1}{5}(60\text{ min}) = (\frac{1}{5}\times 60)\text{ min} = 12\text{ min}$$

Dans un manuel espagnol actuel (3e) :

5 horas . 5 km/hora = 25 km

$$e = v_m \,.\, t \rightarrow t = \frac{e}{v_m} = \frac{400\text{ km}}{220\text{ km/h}} = 1{,}82\text{ h} = 1\text{ h }49\text{ min}$$

$$e = v \,.\, t = 100\text{ km/h} \,.\, 6\text{ h} = 600\text{ km}$$

La technique concrète est utilisée en Angleterre, …

Collection *Teach Yourself Books* (1971).

Ex. 2. Express the speed of 90 km/h (90 km h^{-1}) in metres per second.

We have $\frac{90\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{90\times 1000\text{ m}}{3600\text{ s}}$ = **25 m/s (m s^{-1})**.

$$60\text{ km/h} = \frac{60\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{60\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = \frac{60000}{3600}\text{ m/s} = \frac{100}{6}\text{ m/s} \approx 16{,}67\text{ m/s}$$

Importance dans cette technique de : h = 1 h, à rapprocher du $1.\vec{u} = \vec{u}$ de la définition d'un espace vectoriel.