QUELLES DEMONSTRATIONS METTRE EN EVIDENCE AU COLLEGE ?

« La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.
À cet égard, deux étapes doivent être distinguées : la recherche et la production d'une preuve, d'une part, la mise en forme de cette preuve, d'autre part. Le rôle essentiel de la première étape (production d'une preuve) ne doit pas être occulté par des exigences trop importantes sur la deuxième (mise en forme de la preuve). Pour cela, la responsabilité de produire les éléments d'une démonstration doit être progressivement confiée aux élèves. À partir des éléments qu'ils fournissent, la mise en forme peut, elle, être réalisée collectivement, avec l'aide de l'enseignant. Dans le cadre du socle commun, qui doit être maîtrisé par tous les élèves, c'est la première étape, « recherche et production d'une preuve » qui doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale. La mise en forme écrite ne fait pas partie des exigibles.
La prise de conscience de ce qu'est la recherche et la mise en oeuvre d'une démonstration est également facilitée par le fait que, en certaines occasions, l'enseignant se livre à ce travail devant la classe, avec la participation des élèves.
Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis. » (*Introduction générale pour le collège*).

Au collège, le souci de clarification pousse à simplifier au maximum les résumés de cours, alors les synthèses notées rassemblent les définitions, propriétés et savoir-faire. Le fait d'y inclure un certain nombre de démonstrations d'énoncés de cours est une composante importante de l'apprentissage de la notion de démonstration. Le but est d'en faire des objets d'étude plus explicites pour que, sous l'action du professeur, les élèves essayent de comprendre leur mécanisme. Cela contribue à donner du sens aux techniques de démonstrations que nous leur demandons peu à peu de faire la preuve.
Nous en avons retenu un certain nombre pour leur valeur modélisante.

En sixième :
Aucune démonstration « de cours » n'apparaît comme devant être plus particulièrement mise en valeur.
Pourtant, la mise en place de « courtes séquences déductives » est souhaitable : plusieurs domaines sont susceptibles de le permettre :

Les propriétés de parallélisme et d'orthogonalité ;
La définition du cercle ;
Les programmes de construction liés à la symétrie axiale ;
Les propriétés des quadrilatères et des triangles usuels
La définition et la propriété caractéristique de la médiatrice.

Avec le Cycle Central, on passe à la deuxième phase d'un apprentissage progressif : dès la Cinquième des « occasions de démonstrations » sont attendues.

En cinquième :

Démonstrations attendues :

Nombres relatifs entiers et décimaux : « Il est établi que soustraire un nombre c'est ajouter son opposé ».
Justifier l'égalité $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ à l'aide d'un exemple générique.
Propriétés caractéristiques du parallélogramme à l'aide de la symétrie centrale.
La somme des angles d'un triangle.
Le concours des trois médiatrices d'un triangle et la construction du cercle circonscrit.
Les formules d'aires du parallélogramme, du triangle.
Chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

Propriétés admises :

La distributivité sous forme générale d'identité (à relier avec une formulation en français) : l'approche géométrique est une justification forte.
Certaines réciproques de la caractérisation angulaire du parallélisme.
L'inégalité triangulaire AB + BC ≤ AC fait simplement l'objet d'une mise en évidence.

La formule de l'aire du disque fait l'objet d'une vérification expérimentale.
Pour un prisme droit ou un cylindre de révolution, certaines proportionnalités, sont mises en évidence.

Ne sont pas au programme :

Les règles de suppression de parenthèses à l'intérieur d'une somme algébrique.
Le concours des hauteurs et des médianes d'un triangle
La symétrie conçue comme application du plan dans lui-même.

Des travaux souhaitables sans aller jusqu'à des compétences exigibles en termes de démonstration :

Utiliser le cadre algébrique pour démontrer des résultats arithmétiques (somme de 2 nombres pairs ; somme de 2 multiples d'un nombre…)
Notion de fraction irréductible.
Commencer par démontrer $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ sur un exemple générique (par exemple avec b = 7).

<u>En quatrième :</u>

Démonstrations attendues :

Dans une relation de proportionnalité, mettre en évidence que la correspondance est déterminée par un seul couple…
La règle des signes (la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est mobilisée sur un exemple générique).
Le fait que diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.
Développement de (a+b)(c+d)
Equivalence entre $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ et ad = bc (b et d étant non nuls) ; la procédure « produits en croix » en situation de proportionnalité.
a+c et b+c (resp a-c et b-c) sont rangés dans le même ordre que a et b
ac et bc sont rangés dans le même ordre que a et b si c est strictement positif, dans l'ordre inverse si c est strictement négatif.
Propriétés de puissances avec des exposants simples.
Les trois théorèmes des milieux.
L'étude de cas particuliers de triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes.
Dans des cas particuliers, l'égalité des trois rapports relatifs aux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes.
Définition du cosinus comme un rapport de longueurs (en utilisant la propriété des triangles déterminés par deux parallèles.).
Caractérisation du triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle dont un diamètre est un côté.
Caractérisation des points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.
Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse et théorème réciproque.
Distance d'un point à une droite (problème de minimum).
Caractérisation des points de la bissectrice d'un angle donné par la propriété d'équidistance aux deux côtés de l'angle.
Concours des bissectrices d'un triangle.

Propriétés admises :

Réciproque de : si les points sont alignés avec l'origine, alors il y a proportionnalité des …
L'égalité des trois rapports relatifs aux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes.
Réciproque du théorème de Pythagore.

Ne sont pas au programme :

Toute étude théorique des propriétés des opérations.
La recherche du PPCM et du PGCD.
La factorisation d'expressions analogues à $x(3x+4)-5(3x+4)$.
Les problèmes aboutissant à des équations produits.
Les identités remarquables.
Le théorème de Thalès et sa réciproque.
D'autres relations métriques dans le triangle rectangle.

Des travaux souhaitables sans aller jusqu'à des compétences exigibles en termes de démonstration :

Si les points sont alignés avec l'origine, alors il y a proportionnalité entre les suites définies par les abscisses et les ordonnées de ces points.

Démontrer l'égalité : $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ (k non nul).

Démontrer les règles de calculs sur les écritures fractionnaires.

Preuve du théorème de Pythagore.

Patron de cône possible en tant que situation problème.

D'autres grandeurs quotients que la vitesse.

<u>En classe de troisième</u>

Extraits du programme de 3ème 2008 :

[…]Comme par le passé, les élèves sont conduits à distinguer conjecture et théorème, à reconnaître les propriétés démontrées et celles qui sont admises. Ils sont le plus souvent possible, en classe et en dehors de la classe, mis en situation d'élaborer des démonstrations et de travailler à leur mise en forme. Les activités de recherche, d'élaboration et de rédaction d'une démonstration sont de nature différente et doivent faire l'objet d'une différenciation explicite.[…]

Démonstrations attendues :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- Le théorème de l'angle inscrit.
  (Le résultat relatif à l'angle droit, établi en classe de 4ème, est ainsi généralisé)
- Produits remarquables : $(a+b)^2$; $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, où a et b sont des nombres positifs et b non nul.
- $a^m . a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$
  $a^m / a^n = a^{m-n}$; $(ab)^n = a^n\ b^n$; $(a/b)^n = a^n / b^n$

où a et b sont des nombres non nuls , et m et n entiers relatifs.

Comme en classe de quatrième, ces résultats sont construits et retrouvés, si besoin est, en s'appuyant sur la signification de la notation puissance qui reste l'objectif prioritaire.

- pgcd (a; b) = pgcd (b ; a-b) , où a et b entiers naturels non nuls, tels que $b<a$

En classe de troisième, la question de <u>l'irréductibilité de la fraction</u> est posée. Pour cela, plusieurs méthodes peuvent être envisagées.

→ Après avoir remarqué que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux mêmes multiples de cet entier , il est possible de <u>construire un algorithme</u>, <u>celui d'Euclide ou celui des soustractions</u> <u>successives</u>, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers permet d'apporter une solution au problème dans tous les cas.

- Le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 est établi.
- La représentation graphique d'une fonction linéaire :

Lethéorème de Thalès permet d <u>'établir que les points dont les coordonnées sont obtenues à l'aide d'une fonction linéaire sont sur une droite passant par l'origine du repère.</u>

On peut en établir la preuve sur un exemple, la propriété étant admise dans le cas général.

- Fonctions affines *: Pour ces fonctions,* la proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence.
- *Le fait que contrairement à la moyenne,* la médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes *est dégagé.*

Des travaux souhaitables sans aller jusqu'à des compétences exigibles en termes de démonstration :

- Le théorème de Thalès.
- Des constructions de tableaux de valeurs, des recherches de particularités d'une fonction.
- L'irrationalité de $\sqrt{2}$.
- La comparaison de deux séries statistiques (paramètres de position et de dispersion ou représentations graphiques).

Propriétés admises :

- Théorème réciproque de Thalès (mais : *le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de la position relative des points sur chaque droite- l'utilisation d'un logiciel de construction géométrique permet de créer des situations d'approche ou d'étude…*)
- Volume d'une boule de rayon donné

• Section d'une sphère par un plan : le fait que le centre du cercle d'intersection est l'intersection du plan et de la perpendiculaire menée du centre de la sphère à ce plan est admis.
• Aucune compétence n'est exigible à propos des problèmes d'orthogonalité et de parallélisme dans l'espace, notions qui seront définitivement <u>organisées en classe de seconde</u>**.** Les propriétés utilisées sont mentionnées en cas de besoin. *À propos des pyramides, les activités **se limitent à** celles dont la hauteur est une arête latérale et aux pyramides régulières qui permettent de retrouver les polygones étudiés par ailleurs.*
*• La notion de nombre premier est introduite sans donner lieu à un développement particulier ni à de exercices systématiques de décomposition en facteurs premiers (**notions étudiées en classe de seconde).***

Ne sont pas au programme :
• Les vecteurs, la translation
• La rotation.
La recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné, autre que droit.
Le calcul de la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.
• Les énoncés sur les propriétés de parallélisme et d'orthogonalité dans l'espace (programme de 2^{nde})
• Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition.
• L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable
• Les équations de droites et l'équation cartésienne générale d'une droite sous la forme $ax+by+c=0$ (étudiée en 1èreS).
La notion d'intervalle interquartile (sera abordée en classe de première)

<u>Quelques repères professionnels à partager :</u>

La formulation systématique des énoncés…des énoncés précis, des énoncés exprimés en « si…alors ».
L'emploi de l'équivalence logique est reporté au lycée.
Le travail de fond sur l'expression (écrite et orale).
Le statut des travaux : qu'ils soient pragmatiques, expérimentaux, inductifs (mise en évidence, propriétés dégagées), ou hypothético-déductifs (énoncés admis ou déduits), en distinguant différents types d'écrits (écrits de « recherche », écrits pour être communiqués et discutés, écrits de référence).
Le travail nécessaire sur exemples et contre-exemples.
Le statut des énoncés : définitions, propriétés admises, théorèmes ; impératif de précision.
Ce dont il faut forger … et reforger le sens : « si…alors », « définition », démonstration », « équation »,…