Atelier calcul en $4^{ème}$: Démonstration de l'égalité des « produits en croix » :

b et d étant différents de 0, démontrer que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à : ad = bc (appelé « produit en croix »)

Dans les commentaires du paragraphe 1.1 des programmes de quatrième, il est demandé de justifier le produit en croix en lien avec l'égalité des quotients.
Plusieurs démonstrations ont été proposées dans les ateliers : elles correspondent à des démarches différentes, en fonction des propriétés mathématiques (prérequis) sur lesquelles on choisit de s'appuyer.
Nous avons fait le choix de nous placer à un moment de la progression où les élèves n'ont pas encore vu les propriétés entre égalités et opérations (« *Si on multiplie les deux membres …* » : Selon la progression choisie, ces propriétés seront démontrées plus ou moins tard dans l'année dans le chapitre « équations »)
Voici quelques propositions de démonstrations.
N.B. Les démonstrations suivantes sont écrites à destination des professeurs. Il est bien évident qu'elles sont à construire puis à rédiger avec les élèves en les amenant à les trouver étape par étape.

I- PROPOSITION N°1 :

Elle repose sur la volonté d'utiliser uniquement des prérequis de 6^e et 5^e.

Les prérequis :

- Propriétés de la multiplication
- Définition du quotient de deux nombres
- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ (*)
- Proportionnalité : En classe de cinquième, les procédures utilisées pour traiter une situation de proportionnalité sont de même nature qu'en classe de sixième :
  - passage par l'image de l'unité
  - utilisation d'un rapport de linéarité exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient
  - utilisation du coefficient de proportionnalité exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient.

N.B : (*) En classe de cinquième, l'égalité $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ (pour a et b non nuls) fait l'objet d'une justification à l'aide d'un exemple générique, et elle est admise dans le cas général.
En classe de quatrième, elle peut faire l'objet d'une démonstration dans le cas général selon le même schéma, qui s'appuie sur la définition du quotient :
$\frac{ka}{kb}$ est le nombre q tel que $kb \times q = ka$. Or , $kb \times \frac{a}{b} = k \times b \times \frac{a}{b} = k \times a = ka$. Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{b}$, ce qui prouve l'égalité.

1°) Démontrons que : Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors ad = bc .

Phase 1 : observation et conjecture.

Sur un tableau de proportionnalité tel que celui-ci :

	A	B	C	D
1	2	4	1,4	26
2	3	6	2,1	39

A partir de : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{1,4}{2,1}$, $\frac{4}{6} = \frac{1,4}{2,1}$
on peut observer que : $2 \times 6 = 3 \times 4$ (Facile ! Trop ?)
et que $2 \times 2,1 = 3 \times 1,4$ ...
et aussi que $4 \times 2,1 = 6 \times 1,4$.

Conjecture : Ceci amène à penser que pour des nombres quelconques (*b* et *d* étant non nuls) : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $ad = bc$

Phase 2 : démonstration de la conjecture.

S'il y a égalité des rapports, alors les nombres sont en situation de proportionnalité :

a	c
b	d

Le coefficient de proportionnalité k est le nombre tel que $b \times k = a$ et $d \times k = c$:

kb	kd
b	d

Et alors, on vérifie bien que : $a \times d = bk \times d = b \times dk = b \times c$.
Conclusion ….

2°) Réciproquement : Démontrons que : Si ad = bc, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Phase 1 : observation et conjecture.

Les nombres $\frac{1,4}{2,1}$ et $\frac{26}{39}$ sont-ils égaux ? L'exemple précédent permet de voir que ces deux rapports sont égaux à $\frac{2}{3}$, donc qu'ils sont égaux entre eux. Mais que dire des nombres $\frac{31,2}{16,8}$ et $\frac{871}{469}$?

La valeur approchée donnée par la calculatrice est identique (1,857142857) ; peut-on affirmer pour autant que ces nombres sont égaux ?

Phase 2 : démonstration de la propriété réciproque.

On envisage des nombres *a, b, c* et *d* tels que *ad = bc, b* et *d* étant non nuls.

On a alors $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ (prérequis), donc $\frac{a}{b} = \frac{bc}{bd}$ (hypothèse), d'où $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (prérequis).

Application : $31,2 \times 469 = 16,8 \times 871 = 14632,8$ d'où l'égalité attendue.

……….

II- PROPOSITION N°2 :

Elle met en valeur la propriété : “ *Démontrer que deux nombres sont égaux revient à démontrer que leur différence est nulle* ”.

Les prérequis : • La commutativité de la multiplication

• quotient de numérateur nul

• $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$, comparaison de 2 quotients de même dénominateur, somme et différence de 2 quotients (progr de 5°)

• a = b équivaut à a – b = 0

Dans toute la suite, b et d sont différents de 0.

1°) Démontrons que : Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors ad = bc .

Phase 1 : Observation et conjecture (à partir d’exemples numériques … voir proposition n°1)

Phase 2 : Démonstration :

♦ **Première méthode (**comparaison des numérateurs**)**

Hypothèse de départ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Quand on compare 2 quotients, il peut être intéressant de les mettre au même dénominateur (ici, bd).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ s’écrit aussi $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$

Ces deux quotients sont égaux et ont le même dénominateur, ils ont donc le même numérateur.

On a donc ad = bc

♦ **Deuxième méthode** (différence nulle)

Hypothèse de départ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ces 2 nombres sont égaux donc leur différence est nulle.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ signifie donc $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$.

Or, le calcul de la différence des 2 quotients donne $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

On obtient donc : $\dfrac{ad-bc}{bd} = 0$

Si un quotient est égal à 0 alors son numérateur égal à 0, d'où : ad – cb = 0, ce qui entraîne ad = cb.

2°) Réciproquement : Démontrons que : Si ad = bc, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Phase 1 : Observation et conjecture (à partir d'exemples numériques… voir proposition n°1)

Phase 2 : Démonstration de la propriété réciproque:

♦ **Première méthode** (on calcule $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}$ et on montre que ce nombre est nul)

Hypothèse de départ : on suppose que ad = bc

On veut démontrer que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, ce qui revient à démontrer que $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = 0$

On calcule donc « naturellement » la différence $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}$ en utilisant les « règles de calcul » des quotients, ce qui donne :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Or, d'après l'hypothèse de départ, on a ad = bc , ce qui signifie la même chose que : ad – bc = 0.

D'où : $\dfrac{ad-bc}{bd} = 0$, ce qui donne bien $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = 0$, d'où par suite $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

.

♦ **Deuxième méthode (**variante plus artificielle**,** car la division par bd (*) arrive un peu brutalement !)

Hypothèse de départ : ad = bc

Ces 2 nombres sont égaux donc leur différence est nulle : d'où ad – cb = 0

(*) ce qui donne $\dfrac{ad-bc}{bd} = 0$ car un quotient dont le numérateur vaut 0 est égal à 0

La « règle de la soustraction » de 2 quotients donne $\dfrac{ad-bc}{bd} = \dfrac{ab}{bd} - \dfrac{bc}{bd}$, ce qui prouve que $\dfrac{ab}{bd} = \dfrac{bc}{bd}$

On simplifie alors chaque quotient et on obtient $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.