GRANDEURS ET MESURES

Dans la conférence d' André Pressiat on trouve : extrait de la *Nouvelle Encyclopédie autodidactique Quillet*, parue en 1958.

> […] *IDÉE DE GRANDEUR*
>
> **On appelle grandeur tout ce qui peut être augmenté ou diminué**, comme la largeur d'une route, la durée d'un trajet, la vitesse d'un véhicule, le nombre des feuillets d'un livre, etc.
>
> On appelle plus spécialement *grandeurs mathématiques* celles pour lesquelles on peut définir l'égalité et la somme. Exemples : les surfaces, les volumes, les angles, les arcs, les forces, les quantités de chaleur, etc.
>
> *MESURE D'UNE GRANDEUR ET NOMBRE ENTIER*
>
> D'une façon générale :
>
> **Mesurer une grandeur c'est chercher combien de fois elle renferme une autre grandeur de même espèce prise pour unité.**
>
> […]

Exemple: **15 km est une grandeur (longueur) , 15 est une mesure .**

Autre document de référence : MOTS Tome VI « Grandeur et mesure » APMEP

Atelier :

I) Rédaction de 2 exercices

« Rédiger la solution de ces exercices comme vous l'attendez de la part de vos élèves »

N°1

a) A vélo, je fais 18km/h. Quelle est ma vitesse en m/s ?

b) Un véhicule à 2 roues se déplace à la vitesse de 15m par seconde.
Calculer sa vitesse en km/h ?

Spécifié dans le programme : Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure)

N°2

Une feuille d'aluminium a une épaisseur de 0,015 mm.
Chaque atome a un diamètre de 0,3 nm.(On rappelle que 1 nm = 10^{-9} m)
Combien y a-t-il d'atomes disposés les uns sur les autres dans l'épaisseur de cette feuille ?

Une proposition de rédaction avec les unités

N°1

a) $v = \frac{d}{t} = \frac{18\text{km}}{1\text{h}} = \frac{18 \times 1\text{km}}{3600\text{ s}} = \frac{18\,000\text{ m}}{3600\text{s}} = 5\text{ m/s} = 5\text{ m. s}^{-1}$

b) $v = \frac{d}{t} = \frac{15\text{m}}{1\text{s}} = \frac{15\text{m} \times 3600}{1\text{s} \times 3600} = \frac{54\,000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{54 \times 1\,000\text{m}}{1\text{h}} = \frac{54\text{ km}}{1\text{h}} = 54\text{ km/ h} = 54\text{ km.h}^{-1}$

N°2

e = 0,015 mm = $1,5\times10^{-2}$ mm

d = 0,3 nm = 0,3×1 nm = $0,3\times10^{-9}$ m = $0,3\times10^{-9}\times1$ m = $0,3\times10^{-9}\times10^{3}$ mm = $0,3\times10^{-6}$ mm
d = 3×10^{-7} mm

$$\frac{1,5\times10^{-2}\text{ mm}}{3\times10^{-7}\text{ mm}} = 0,5\times10^{5} = 50\,000$$

ou

$$\frac{0,015\text{ mm}}{0,3\text{ nm}} = \frac{0,015\text{ mm}}{0,3\times10^{-9}\text{ m}} = \dots = \frac{0,015\text{ mm}}{3\times10^{-7}\text{ mm}} = \dots$$

50 000 atomes sont disposés les uns sur les autres dans l'épaisseur de cette feuille

Le débat dans les groupes :

Réactions	Réponses
C'est interdit de mettre les unités dans les calculs. C'est interdit d'additionner les cm et dm, de multiplier des cm et dm². Cela complique. C'est pour la physique pas pour les maths . J'utilise systématiquement un tableau de proportionnalité. Je faisais comme ça dans le temps.	« L'utilisation des unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime **Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens**» (programmes primaires, 6°, 5° et 4°) Le passage par l'unité (18km = 18 x 1km= 18x 1000m...) s'inscrit dans l'articulation primaire-collège . L'utilisation du tableau de proportionnalité ne doit pas être systématique : en 4° on met en oeuvre la formule v = d / t. Une grandeur est une notion mathématique (Texte de A. Pressiat).

II) Exemples de calculs de volumes:

« Que pensez-vous de la rédaction des exemples suivants? »

*** *$\mathcal{V} = 2\times5\times4 = 40\text{ cm}^3$ (égalité fausse)*

*** Donner la valeur arrondie au mm ^{3} du volume d'une pyramide dont la base est un carré de 8cm de côté et de hauteur 10 cm.

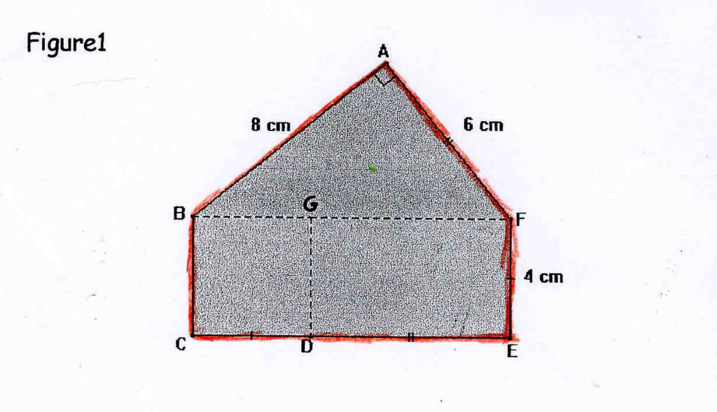
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times8\times8\times10 = \frac{640}{3} \text{ d'où } \mathcal{V}\approx \mathbf{213{,}3\ cm^3} \textbf{ ou } \mathcal{V}\approx \mathbf{2133\ mm^3}\ \mathbf{!!!}$$

Proposition avec les unités :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times8\text{ cm}\times8\text{ cm}\times10\text{ cm} = \frac{640}{3}\text{ cm}^3$$

$$\mathcal{V} = \frac{640}{3}\text{ cm}^3 = \frac{640}{3}\times1\text{ cm}^3 = \frac{640}{3}\times1\,000\text{ mm}^3 \text{ d'où } \mathcal{V}\approx \mathbf{213\,333\ mm^3}$$

III) Calcul d'aire et de périmètre: Exemple d'écrit produit en classe de 6ème cette année
Cette rédaction d'un élève de 6° ,conforme au programme de primaire ,apparaîtra de plus en plus souvent (égalités correctes car homogènes: calculs sur les grandeurs)



Dans la figure1, BGDC est un carré et FGDE est un rectangle

P= 8cm+(6cm×2)+(4cm×3)=32 cm

A=(4cm×4 cm)+(4cm×6cm)+(8cm×6cm:2)

A= 16 cm² + 24 cm² + 24 cm²

4 cm² Thieu

IV) Vitesse et durée : Extrait de copie d'un PE1 sur un concours blanc

Question posée :
Un cycliste décide de monter un col. Pour cela, il choisit le petit plateau (39 dents) et le pignon de 26 dents. La montée est de 12 km, grimpée à la vitesse moyenne de 15 km/h. Après une pause de 10 min au sommet du col, le cycliste redescend par le même chemin à la vitesse de 40 km/h.

a. Sachant qu'il est parti à 8h30 du pied du col, à quelle heure sera-t-il de retour à son point de départ ?

Extrait de copie : (Confusion entre grandeur et mesure de grandeur)

3- a/ Calculons le temps mis par le cycliste pour effectuer la grimpée. Il parcourt 15 km en 1 heure. Soit x le temps mis pour parcourir 12 km :

15 km → 60 minutes
12 km → x minutes

D'où x = $\frac{60 \times 12}{15}$ = 48 minutes.

Calculons le temps mis pour effectuer la descente à la vitesse de 40 km/h. Soit y cette valeur :

40 km → 60 minutes
12 km → y

D'où y = $\frac{60 \times 12}{40}$ = 18 minutes.

Le problème est bien compris et résolu correctement , MAIS :
pour le calcul de x : x est une grandeur (« soit x le temps »...),puis x est une mesure (« x minutes ») et l'égalité finale n'est pas homogène.
Pour le calcul de y : même type de confusions

V) Autres exemples :

- Lien avec les sciences physiques

On peut repérer les points du programme des sciences physiques où le lien avec les mathématiques est cité en particulier avec les grandeurs.

(Attention, la loi d'Ohm passe en 4ème cette année)

- **Volume et masse de l'air (grandeurs et mesures)**
- **Intensité et tension : 2 grandeurs électriques issues de la mesure (notation scientifique, ordre de grandeur, organisation et gestion de données)**
- **La résistance (notation scientifique, ordres de grandeur)**
- **La loi d'Ohm (tableau de données, représentations graphiques proportionnalité, grandeur *quotient*)**
- **Vitesse de la lumière dans le vide (puissance de 10, ordres de grandeur, proportionnalité, *grandeur quotient)***

Exemple : Un calcul d'échelle

Un atome est formé d'un noyau et d'électrons qui gravitent autour du noyau. *Représentons par une boule de 1 cm de diamètre le noyau d'un atome qui mesure en réalité* 4×10^{-12} mm. Quelle échelle utilise-t-on alors ?

$$e = \frac{1\text{cm}}{4\times 10^{-12}\,\text{mm}} = \frac{10\text{ mm}}{4\times 10^{-12}\,\text{mm}} = 2{,}5 \times 10^{12}$$

Le noyau de cet atome a été grossi 2500 milliards de fois.

- Lien avec l'Histoire – Géographie : exemple de la répartition de la population (Donner du sens à la densité)

« La densité d'un pays, nous a expliqué le professeur d'histoire et géographie, c'est le nombre moyen d'habitants par km² de ce pays. » a) L'Inde a une superficie de 3 268 000 km² et avait, en 2001, une population de 1 029 033 000 habitants. Calculer la densité en hab./km² de ce pays.

Dimathème 4e Edition 2002

NB: En cours de géographie , les élèves doivent lire et comprendre des tableaux de densité mais en général ils n'effectuent pas de tels calculs.

VI) Prendre conscience des difficultés et des limites du calcul avec les grandeurs

1) ($\dfrac{400\text{km}}{220\text{km/h}}$ =1,82h = 1h 49min) dans le texte d'André Pressiat

2) Exercice densité (suite)

b) En France, nous étions 60 186 177 habitants en 1999 pour une densité d'environ 107 hab./km². Calculer la superficie approximative de la France.   c) Les Etats-Unis d'Amérique avaient en 2001 une densité de 29 hab./km² pour une superficie de 9 364 000 km². Combien d'habitants comptait approximativement ce pays en 2001 ?

3) Exercice Bordas 4e

1m³ d'eau de mer contient 0,004 mg d'or.   *Le volume total d'eau de mer sur la Terre est de 1,3 x 10⁶ km³.*   *Calculer en tonnes la masse totale d'or que renferment les mers et océans.*

$1{,}3 \times 10^6\ \text{km}^3 = 1{,}3 \times 10^6 \times 1\ \text{km}^3 = 1{,}3 \times 10^6 \times 10^9\ \text{m}^3 = 1{,}3 \times 10^{15}\ \text{m}^3$
$1{,}3 \times 10^{15}\ \mathbf{m^3} \times 0{,}004\ \mathbf{mg/m^3} = 1{,}3 \times 0{,}004 \times 10^{15} \times 1\ \mathbf{mg} = 1{,}3 \times 0{,}004 \times 10^{15} \times 10^{-9}\ \text{t} =$
$0{,}0052 \times 10^6\ \text{t} = 5{,}2 \times 10^3\ \text{t}$ *Les mers et océans renferment 5 200 t d'or !*

3) Un dernier exercice :

Un véhicule roule à la vitesse de 62km/h pendant 4min30s.   Quelle distance a-t-il parcourue en km ?

$$d = v \times t = \frac{62\text{km}}{1\text{h}} \times 4{,}5\ \text{min} = \frac{62\text{km}}{60\ \text{min}} \times 4{,}5\ \text{min} = \frac{62 \times 4{,}5}{60}\text{km} = 4{,}65\ \text{km}$$

Et notre bonne proportionnalité dans tout çà !!!

Conclusion

1) Ne pas pénaliser des élèves qui calculent avec les grandeurs !

« L'utilisation des unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime.   **Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens**»

2) Accepter de la part des élèves des écritures maladroites mais essayer de leur donner des modèles corrects.

Pour citer Monsieur Jean AYMES, IA-IPR :

- *veiller à ne pas centrer seulement sur les calculs ; le sens des grandeurs, tant qu'on le peut, importe aussi ...*
- *éviter des comportements trop exigeants envers les élèves (ce n'est pas de conformité qu'il s'agit d'abord), on fait cela pour que les élèves pensent mieux, pas pour installer une contrainte où on va encore les sanctionner* donc on doit conseiller de corriger les travaux d'élèves avec indulgence.