PROPORTIONNALITE ET GEOMETRIE PLANE AU CYCLE 4

Constat :

Comme le montrent les repères de progressivité des programmes, les notions de proportionnalité, d'agrandissement/réduction, le théorème de Thalès, les homothéties… sont étroitement liées et ce lien doit être mis en évidence dans la progression de leur enseignement.

Il peut en résulter une certaine difficulté pour construire une progression permettant d'établir ces liens.

Une autre difficulté est le choix des démonstrations à effectuer avec les élèves et la forme sous laquelle on peut les travailler.

Extrait des programmes relatif au thème D « Espace et géométrie »:

En introduction, on peut lire :

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent.

Dans les repères de progressivité :

En 3ème, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème.

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration. […] Le théorème de Thalès est introduit en 3ème, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions. […] les homothéties sont amenées en 3ème, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

Extraits du document ressource d'accompagnement « Espace et géométrie » au cycle 4 :

Progressivité des apprentissages

Le théorème de Thalès est introduit en 3ème. L'étude des configurations « triangles emboîtés » puis « papillon » permet progressivement d'aboutir à la version générale du théorème, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie ainsi qu'avec les agrandissements et les réductions. L'étude des rapports trigonométriques peut être répartie entre les classes de 4ème et de 3ème.

Configurations usuelles

Les triangles semblables fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès.

Le théorème de Thalès est amené avec progressivité, d'abord avec la configuration des « triangles emboîtés ». Les deux points de vue « commencer par le théorème de la droite des milieux, puis généraliser » ou « présenter le premier comme une conséquence du deuxième » sont acceptables, et relèvent de la liberté pédagogique. La démonstration du théorème de la droite des milieux n'est pas un objectif. Le théorème de Thalès peut être formalisé en termes de proportionnalité, ce qui est plus immédiatement perceptible et plus simple à manipuler que l'écriture de rapports de longueurs. Le lien avec les triangles semblables, les agrandissements et réductions, et les homothéties de rapport positif peut être établi à cette occasion. La configuration « en papillon » peut donner l'occasion de mentionner les homothéties de rapport négatif, notamment en liaison avec les logiciels de tracé ; cependant, au-delà de ce lien, ces dernières homothéties n'ont pas vocation à être développées au cycle 4.

Le raisonnement et la démonstration

Le raisonnement intervient de façon diversifiée (déductif, par l'absurde, etc.). La démonstration est introduite avec prudence, sur des situations simples, qui nécessitent un argument de vérité dans le modèle de la géométrie abstraite, et sans décourager les élèves. Pour créer la possibilité d'îlots de démonstration, le professeur peut donner une liste – de longueur raisonnable – de définitions et théorèmes à connaître, en veillant à ce que cette liste soit cohérente et qu'elle permette de résoudre un nombre suffisant de problèmes. Dans ces problèmes, il convient de dissocier l'exigence de résoudre la tâche, qui est source de motivation, de celle de communiquer cette résolution en rédigeant une démonstration. Cette dernière activité, pourtant essentielle et spécifique aux mathématiques, est plus délicate ; elle doit être conduite de façon progressive, non systématique, différenciée selon l'appétence et le niveau des élèves. Il convient surtout d'éviter les rédactions trop longues, trop lourdes, qui égarent les élèves et les détournent de la résolution d'un problème. Si la rédaction formalisée d'une démonstration n'est pas un attendu du collège, l'exercice progressif du raisonnement est un objectif fondamental.

Proposition de progression :

Voici une proposition de progression induite par les démonstrations qui pourront être envisagées.

1. Les triangles semblables.
2. Les agrandissements et réductions de figures planes.
3. Les agrandissements et réductions de triangles, et la caractérisation des triangles semblables par la proportionnalité.
4. Le cas particulier du théorème de Thalès, en configuration « triangles emboîtés » puis « papillon ».
5. Les homothéties.
6. La réciproque du théorème de Thalès.
7. Les rapports trigonométriques.
8. Vers les fonctions linéaires.

Pré-requis :

- Calcul d'une quatrième proportionnelle (dès le cycle 3) ;
- Définitions et propriétés des angles alternes-internes et opposés par le sommet :
  (O) Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure ;
  (A) Si deux angles alternes internes sont formés par deux droites parallèles alors ils ont la même mesure ;
  (A') Si deux angles alternes internes ont la même mesure alors ils sont formés par deux droites parallèles ;
- Propriété sur la somme des mesures des angles d'un triangle ;
- Définition et propriétés des triangles égaux :
  (E1) Si deux triangles sont égaux alors leurs angles ont deux à deux la même mesure ;
  (E2b) Si deux triangles ont 2 à 2 un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur alors ils sont égaux ;
- Propriétés sur les aires de triangles :
  (TA1) Si deux triangles ont un côté commun et si les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté commun, alors ils ont la même aire ;
  (TA2) Le rapport des aires de deux triangles ayant même hauteur égale celui de leurs bases.

A chaque étape, nous proposerons :

- Un ou des exemples d'activités d'introduction, dont plusieurs sont issus du document de l'IREM de Bordeaux. Ces exemples d'activités seront consultables sur le site académique (https://disciplines.ac-toulouse.fr/mathematiques) via des liens actifs sur ce document ;
- Les énoncés (définitions ou propriétés concernés) qui en résulteront ;
- Des propositions de démonstrations. Ces propositions pourront, selon le contexte de la classe, être admises, intégrées à l'activité, proposées en exercices, en devoirs hors classe, en totalité ou en partie seulement (comme il est dit dans le document ressource d'accompagnement).
  La forme visuelle proposée, basée sur des figures Geogebra évolutives (également mises à disposition via des liens actifs sur le document qui sera mis en ligne sur le site académique) pourra ouvrir des pistes d'utilisation avec les élèves permettant un travail sur le raisonnement, sans la contrainte d'une démonstration rédigée (en demandant par exemple de retrouver les propriétés permettant de passer d'une étape à l'autre, éventuellement à partir d'une liste fournie en guise de coup de pouce), ou a contrario servir de support pour une démonstration rédigée.

1. Les triangles semblables. *Début de cycle.*

Activité d'introduction :

Dès le début du cycle, les problèmes de constructions de triangles à partir d'informations diverses sont l'occasion de demander aux élèves de construire un triangle connaissant les mesures de ses trois angles et de découvrir ainsi des triangles semblables.

Définition :

Des triangles semblables sont des triangles ayant leurs angles deux à deux de même mesure.

Propriété (S1) :

Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Démonstration :
En réinvestissant la propriété sur la somme des mesures des angles d'un triangle qui aura été vue au préalable.

2. Agrandissements et réductions de figures planes. *Début de cycle.*

Activité d'introduction :

[Activité agrandissements et réductions de figures planes]

Définition :

On réalise un agrandissement ou une réduction d'une figure lorsque toutes les longueurs sont agrandies ou réduites proportionnellement.

Propriété (admise à ce stade) **:**

Dans un agrandissement ou une réduction, les angles sont conservés.

Propriété (conséquence) **:**

Si on agrandit ou on réduit un triangle, on obtient un triangle semblable.

Remarque : les deux propriétés précédentes, équivalentes, pourront être démontrées ultérieurement lors du point 3.

3. Agrandissements et réductions de triangles. *Milieu de cycle.*

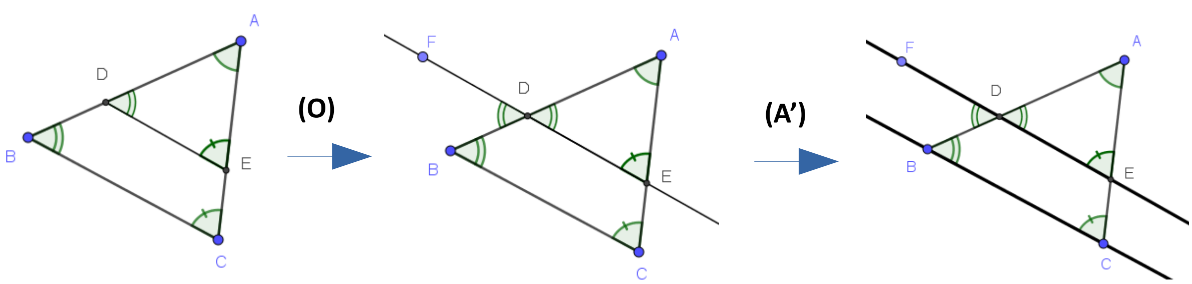
Activité d'introduction :

[Activité agrandissements et réductions de triangle]

Lemme (SP) :

Si deux triangles semblables ABC et ADE sont tels que D appartient à [AB] et $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ alors les côtés (BC) et (DE) sont parallèles

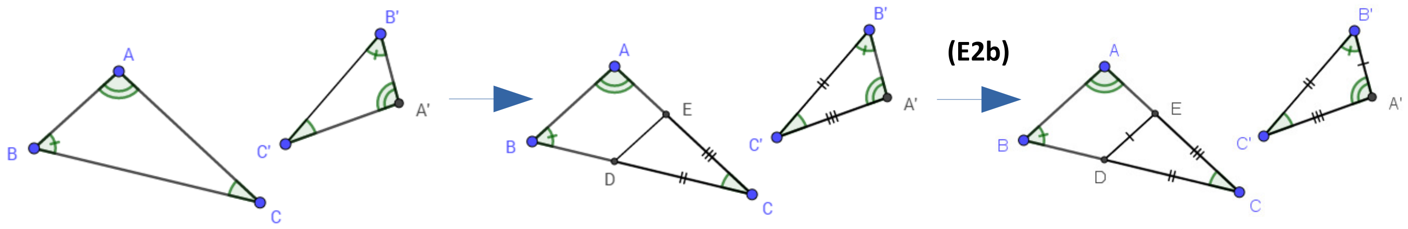
Démonstration : **Lien vers la figure évolutive Geogebra**

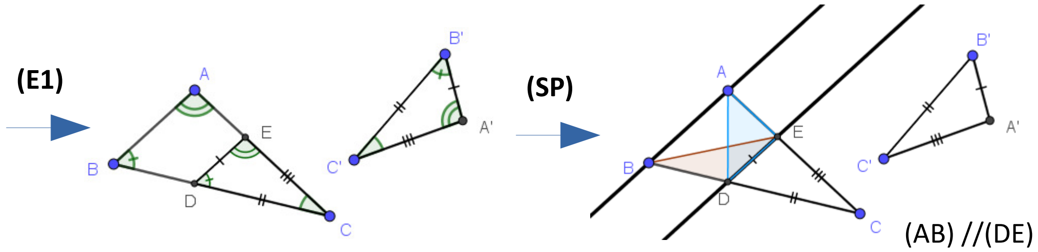


Propriété (S2) :

Si deux triangles sont semblables, alors ils sont agrandissement/réduction l'un de l'autre.

Démonstration : [Lien vers la figure évolutive Geogebra]

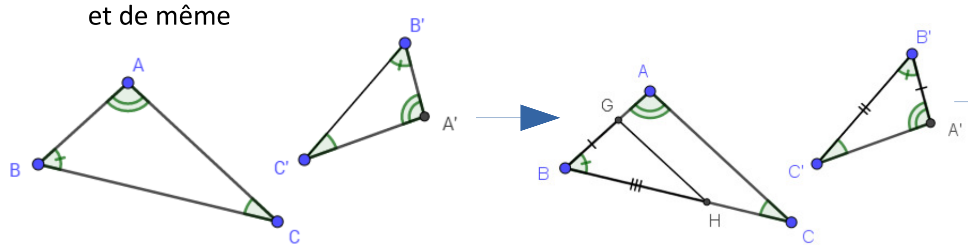




(TA1) → $A_{ADE} = A_{BED}$

→ $A_{ADC} = A_{BEC}$ → $\dfrac{A_{ADC}}{A_{DEC}} = \dfrac{A_{BED}}{A_{DEC}}$ (TA2) → $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CD}$ → $\dfrac{CA}{CA'} = \dfrac{CB'}{CB'}$

et de même



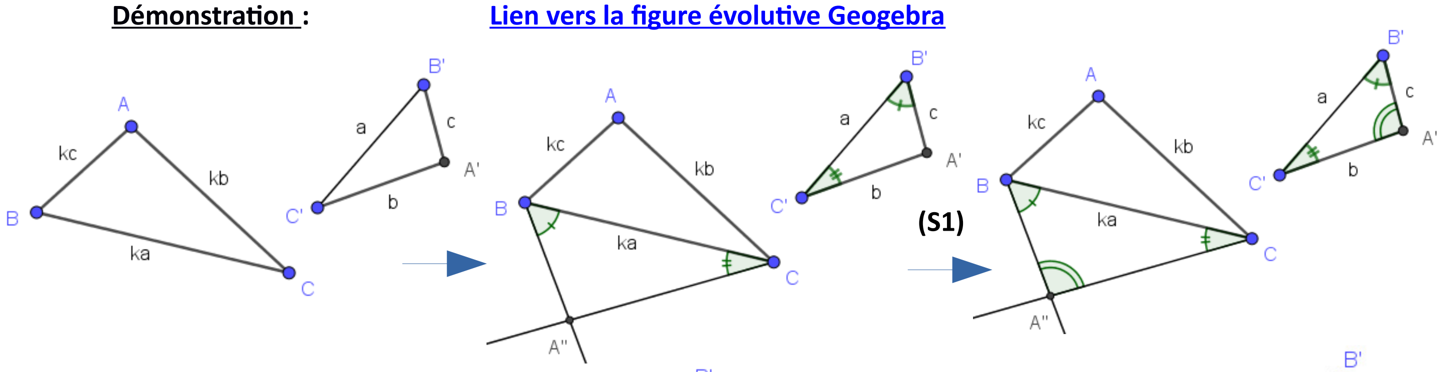
→ $\dfrac{BA}{B'A'} = \dfrac{CB'}{C'B'}$

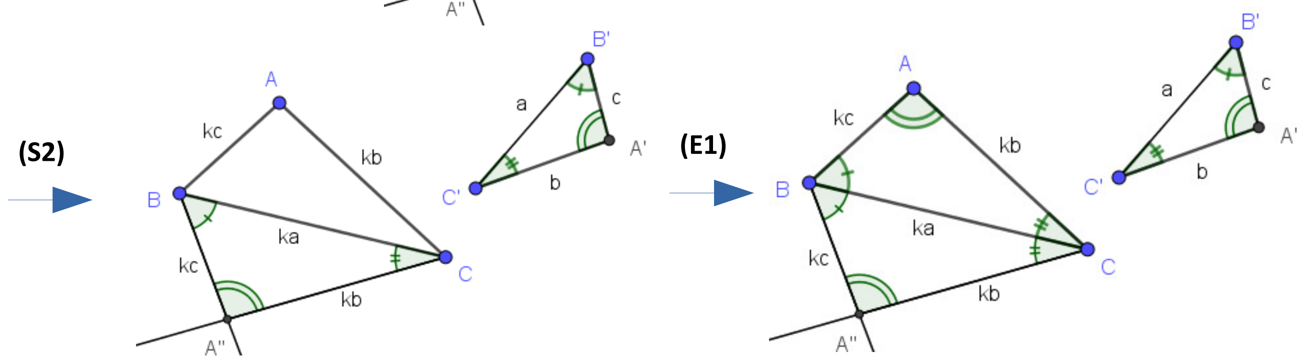
$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A'B'}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{B'C'}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{A'C'}}$$

Propriété (S2'):

Si deux triangles sont agrandissement/réduction l'un de l'autre, alors ils sont semblables.

<u>Démonstration</u> : **[Lien vers la figure évolutive Geogebra]**





4. Le cas particulier du théorème de Thalès. *Fin de cycle.*

Activité d'introduction :

Activité d'introduction de l'utilisation du théorème de Thalès dans le cas de triangles emboîtés

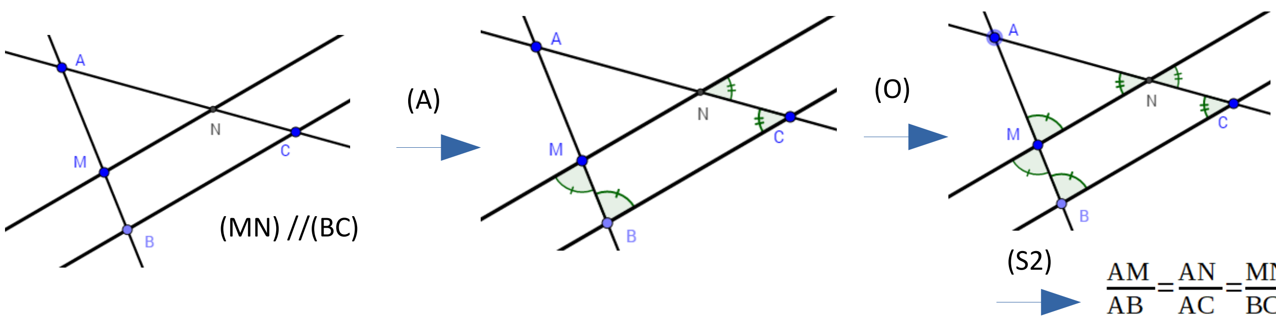
Activité d'introduction de l'utilisation du théorème de Thalès dans le cas de triangles en configuration « papillon »

Propriété (T) :

Le théorème de Thalès (qui peut être travaillé en deux temps, d'abord en configuration « triangles emboîtés », puis « papillon »).

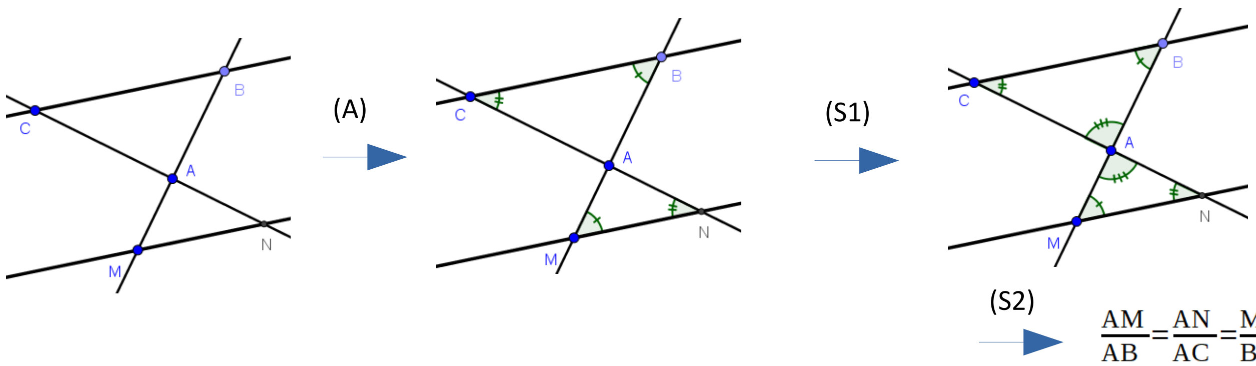
La contraposée du théorème de Thalès.

Démonstration :
Configuration triangles emboîtés **Lien vers la figure évolutive Geogebra**



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Configuration en papillon Lien vers la figure évolutive Geogebra



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Remarque :
Il est possible de traiter le théorème de Thalès préalablement à la proportionnalité des triangles semblables, ces deux propriétés étant équivalentes (la démonstration de (T) => (S2) étant similaire à la démonstration de (S2) proposée, l'égalité des quotients découlant non plus des propriétés d'aires de triangles mais du théorème de Thalès).

Lien vers la figure évolutive Geogebra pour (T) => (S2)

Une démonstration du théorème de Thalès utilisant les mêmes propriétés d'aires de triangles qu'en 3. pourra alors être envisagée.

5. Les homothéties. *Fin de cycle.*

Remarque : Un atelier des journées pédagogiques 2017 portait sur les transformations (quelles activités, quel résumé de cours). On retrouvera ici des propositions qui avaient été faites alors.

Activité d'introduction :

Activité d'introduction des homothéties à l'aide de Geogebra

Activité d'introduction des homothéties à l'aide de Scratch (exercice 3)

Exemple de synthèse dans le cours :

Exemple de synthèse

Aucune démonstration n'est attendue ici.

6. La réciproque du théorème de Thalès. *Fin de cycle.*

Activité d'introduction :

Activité sur la réciproque de Thalès

Propriété :

La réciproque du théorème de Thalès.

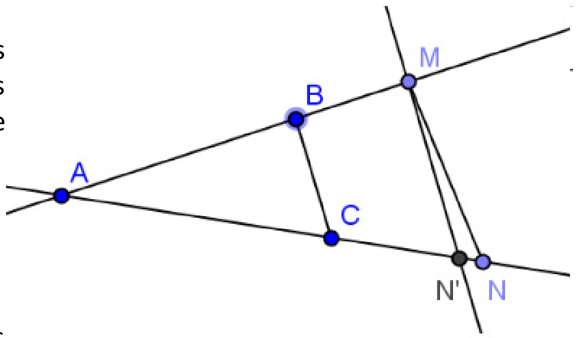
Démonstration **:**

On considère ici les données suivantes :

- Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A
- M est un point de la droite (AB) distinct de A
- N est un point de la droite (AC) distinct de A
- Les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Construisons le point N' de (AC) tel que (MN') // (BC). On ne sait pas si les points N et N' sont distincts ou non, faisons volontairement une figure où ils sont différents.

On admettra/vérifiera que dans tous les cas de figures possibles (pouvant être caractérisés par l'égalité des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MAN}$), N' est alors aligné dans le même ordre que N avec les points A et C.



On montre alors à l'aide du théorème de Thalès que AN = AN, donc, puisque A, N, C et A, N', C sont alignés dans le même ordre, que N et N' sont confondus.

7. Les rapports trigonométriques. *Fin de cycle.*

Activité d'introduction :

Activité de découverte des rapports trigonométriques à l'aide de Geogebra

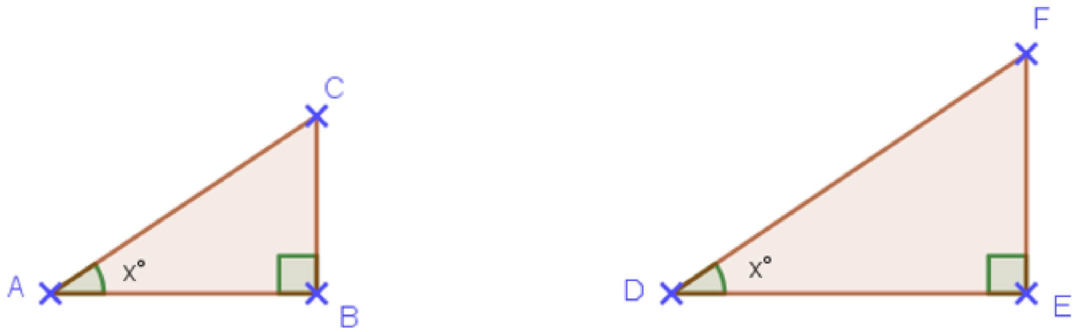
Activité de découverte de l'utilisation des rapports trigonométriques pour calculer des longueurs dans un triangle rectangle

Propriété :

Dans un triangle ABC rectangle en B, les quotients $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{BC}{AB}$ ne dépendent que de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

Démonstration :

Voici deux triangles rectangles ayant un angle aigu de même mesure : $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = x°$.



On démontre que les triangles ABC et DEF sont semblables et sont donc agrandissement/réduction l'un de l'autre.

En notant k le coefficient d'agrandissement/réduction qui permet d'obtenir le triangle DEF à partir du triangle ABC, on a $\frac{DE}{DF} = \frac{k \times AB}{k \times AC} = \frac{AB}{AC}$. On fait de même pour les quotients correspondant au sinus et à la tangente.

Définition :

Définition du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

8. Vers les fonctions linéaires. *Fin de cycle.*

Activité d'introduction :

Cette activité permet de faire un lien entre les fonctions linéaires et les agrandissements/réductions de figures géométriques et le théorème de Thalès.

Activité sur les agrandissements et réductions de figures et la représentation graphique

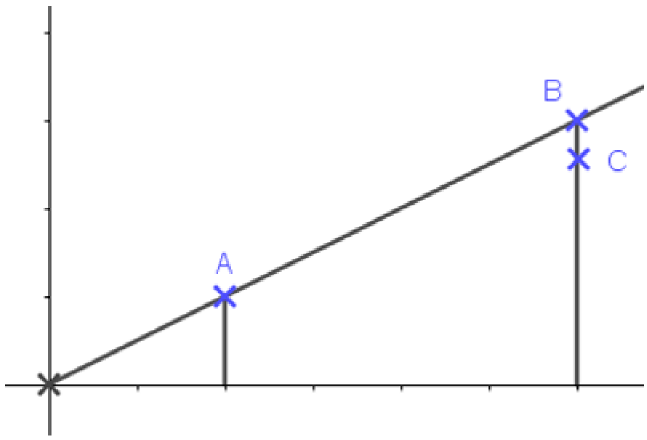
Propriété :

Si dans un graphique, des points sont alignés avec l'origine du repère, alors ils représentent une situation de proportionnalité.
Si on représente graphiquement une situation de proportionnalité, on obtient des points alignés avec l'origine du repère.

Démonstration **:**

La première affirmation se démontre à l'aide du théorème de Thalès ou de la propriété de proportionnalité des triangles semblables.

La seconde affirmation est l'occasion d'utiliser un raisonnement par l'absurde.



Les coordonnées de A et C sont proportionnelles et B est le point aligné avec A et l'origine ayant la même abscisse que C.
On montre que le dessin est absurde et que B et C sont confondus.