

La démonstration: un levier pour RAISONNER

Journées pédagogiques

Avril - Mai 2019

« Démontrer est une **composante fondamentale** de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques **démonstrations exemplaires**, que les élèves découvrent selon des **modalités variées** : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »

Extrait programme seconde (BO janvier 2019)

**Liste des démonstrations
identifiées dans le
programme de seconde.**

Nombres et calculs

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- Pour une valeur numérique de a , la somme de deux multiples de a est multiple de a .
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Nombres et calculs

Quels que soient les réels positifs a et b , on a

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Si a et b sont des réels strictement positifs,

$$\sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Géométrie

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M .

Relation trigonométrique dans un triangle rectangle
 $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Fonctions

Étudier la position relative des courbes
d'équation $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$
pour $x \geq 0$

Variations des fonctions carrée, inverse,
racine carrée.

**mais d'autres démonstrations à
ne pas oublier :**

Formule de la distance entre deux
points dans un repère orthonormé

Sens de variation des fonctions affines

....

Pour les 4 démonstrations fléchées :

- ▶ En quoi ces démonstrations sont-elles exemplaires?
- ▶ Quelles mises en œuvre ?
- ▶ Comment les réinvestir ?

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Le professeur seul au tableau ?

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel

- Il existe donc p et q entiers non nuls tels que $\frac{p}{q}$ irréductible
- on a $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ d'où $2q^2 = p^2$
- p^2 est donc un nombre pair
- Donc p est pair
- Donc q est pair
- Cela contredit le fait que la fraction soit irréductible

Des activités à réaliser en amont ... SANS CALCULATRICE

▶ $\sqrt{2}$ est-il égal à $\frac{17}{12}$?

▶ $\sqrt{2}$ est-il égal à $\frac{815}{577}$?

▶ approche historique (voir compléments)

Pourquoi exemplaire ?

- Mise en œuvre du raisonnement par l'absurde
- Le raisonnement par l'absurde est intéressant pour des **problèmes du type** :

« Montrer qu'il n'existe pas.... »

ou

« Montrer qu'il est impossible de ... »

Réflexion sur le positionnement de cette démonstration ...

Des notions à travailler en amont ...

Pour comparer 2 nombres positifs, on peut comparer leur carré

Comment écrire un nombre pair ?

Comment écrire un nombre impair ?

Le carré d'un entier pair est pair

Le carré d'un nombre impair est impair

Si p^2 est pair, p peut-il être impair ?

Étudier la position relative des courbes d'équation :

$$y = x ; y = x^2 ; y = x^3$$

$$\text{pour } x \geq 0$$

Devoir hors classe différencié

Deux versions

Correction :

Exposé par un groupe / travail de l'oral

Des notions à travailler en amont ...

Vocabulaire et méthode autour des
positions relatives

Pourquoi exemplaire ?

- Mise en œuvre d'une méthode générique pour étudier la position relative de 2 courbes
- Factoriser pour étudier le signe d'une expression

**Deux vecteurs sont colinéaires
si et seulement si
leur déterminant est nul**

- Le sens direct est réalisé par les élèves
- La réciproque : à la charge du professeur
Peut être travaillée en amont sur des exemples
afin de préparer la disjonction de cas ...

Pourquoi exemplaire ?

- Mise en œuvre d'un raisonnement par disjonction de cas
- Travail sur la logique (condition nécessaire et suffisante)

Réinvestissement dans la recherche d'équation cartésienne de droite.

**Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$
n'est pas décimal.**

Approche avec des exemples génériques :

- $1/3$ est-il égal à 0,33?
- à 0,333?
- ... à 0,333 333 3 ?

Etc ...

Pourquoi exemplaire ?

- Mise en œuvre de la démonstration sur des exemples génériques [*point de vue de l'enseignant*]
- Raisonnement par l'absurde

A venir :

Un document ressource sur le raisonnement