

# OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION DE 2001

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE: 4 heures

*Les quatre exercices sont indépendants. L'usage de la calculatrice est autorisé.*

## EXERCICE 1

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4.

Le dé est posé sur une table, face « 1 » contre cette table.

Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.

A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme  $s$  de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le « 1 » initial.

- 1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour  $s$ .
- 2) La somme  $s$  peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?
- 3)

## EXERCICE 2

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantés en A, B, C et D dans cet ordre.

Ces poteaux délimitent trois buts de largeurs :

$AB = 1$ ,  $BC = 2$ ,  $CD = d$ , où  $d$  est une longueur donnée.

Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles ANM, BMC et CNM égaux.

## EXERCICE 3

$n$  désigne un entier naturel non nul. Soit l'équation (E) :  $x + x^2 + \dots + x^n$ .

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'équation (E) admet une seule solution réelle positive. On note  $r_n$  ce nombre réel positif solution de (E).

Existe-t-il un entier naturel  $n$  tel que  $r_n < \frac{1}{2}$  ?

Existe-t-il un entier naturel  $a$  tel que  $r_n < 0.51$  ?

Existe-t-il un entier naturel  $n$  tel que  $r_n < \frac{1}{2} + 10^{-20}$  ?

## EXERCICE 4

Dessinez un cube C (un dessin même approximatif en perspective suffira).

Soient A' un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire tel que le milieu du segment [AB] soit le centre du cube. Considérons un autre cube C' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés. Certaines arêtes de C rencontrent des arêtes de C'. Justifiez le fait que, en dehors de A et B, on obtient six points d'intersection entre une arête de C et une arête de C'.

Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.

V étant le volume de C, quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et C' ?