



Mathématiques: olympiades sujets 2003

Exercice N°1

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés. Quels sont le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées ?

Exercice N°2

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan telles que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y . C'est par exemple le cas lorsque $ABCD$ est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1°) Etude du cas " 1,5 " où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y .

Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessiner cette configuration.

2°) Etude du cas " 2,4 " où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y .

a) On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun. Quelle configuration obtient-on ? La dessiner.

b) Que se passe-t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?

3°) Etudier le cas " 3,3 ".

Exercice 3 : Vider les boîtes

On dispose de n boîtes contenant respectivement 1, 2, 3, ..., n jetons. Il s'agit de les vider en respectant les règles suivantes qui constituent, dans cet ordre, une étape :

a) on choisit un certain nombre de boîtes

b) on extrait de chacune des boîtes choisies un même nombre de jetons.

Par exemple, avec cinq boîtes contenant respectivement 1, 2, 3, 4, 5 jetons, une étape peut consister à choisir les deux dernières, à extraire quatre jetons de chacune. Les boîtes contiennent alors respectivement 1, 2, 3, 0, 1 jetons.

Le nombre de boîtes choisies, le nombre de jetons extraits peuvent varier à chaque étape.

1) Vider 7 boîtes en un aussi petit nombre d'étapes que possible.

2) Décrire une stratégie permettant de vider 2003 boîtes en 11 étapes.

3) Donner une méthode permettant de vider un nombre quelconque de boîtes en un nombre d'étapes aussi petit que possible.

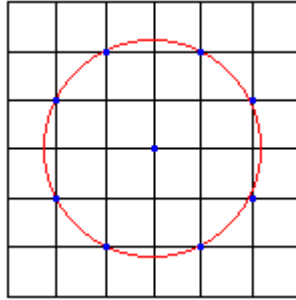
Exercice N°4

René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté.

Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central. René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés dans le sol. Tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent...

Mais René est aussi un bricoleur soigneux ; alors, pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation.

La figure ci-dessous donne un exemple de table à 8 pieds.



Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le coefficient de solidité s de la table par la formule $s = \frac{n}{d}$. Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

- 1°) Calculer le coefficient de solidité de la table ci-dessus.
- 2°) Quelles sont les deux tables les plus petites ? Préciser leur coefficient de solidité.
- 3°) Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?
- 4°) Quelle est la table la plus solide ?
- 5°) René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre exprimé en mètres soit un nombre entier ?