

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2004

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 : coloriages

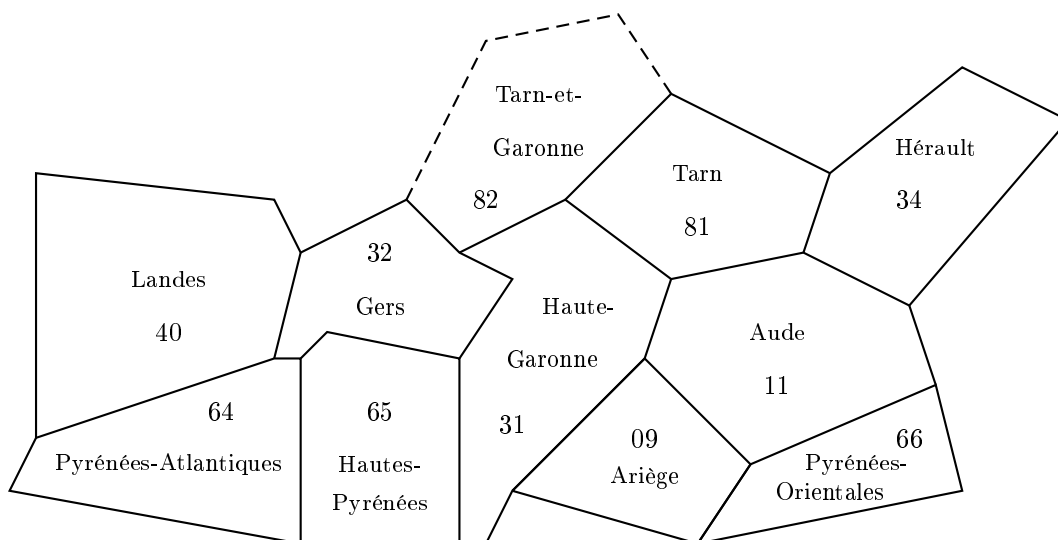
Vous reconnaîtrez sans doute cette carte de 11 départements du Sud-Ouest de la France, repérés par leur nom et leur numéro.

L'objectif est de colorier cette carte par département à l'aide des 3 couleurs Rouge, Jaune et Bleu, couleurs à indiquer par les initiales respectives R, J et B, et ceci en respectant la règle des cartes géographiques :

deux départements voisins doivent être coloriés à l'aide de deux couleurs différentes

Par exemple, les Pyrénées-Atlantiques (64) et le Gers (32) sont voisins et doivent donc être coloriés à l'aide de couleurs différentes, alors que les Landes (40) et les Hautes-Pyrénées (65) ne le sont pas et peuvent donc être coloriés à l'aide de la même couleur.

Attention : le département du Tarn-et-Garonne (82), délimité partiellement en pointillés sur la carte ci-dessous, n'est à prendre en compte que pour la question 4.



- 1) Colorier la carte de 10 départements avec les trois couleurs en respectant la règle. (Annexe à rendre avec la copie.)
- 2) a) Démontrer que les Landes et les Hautes-Pyrénées sont nécessairement coloriés de la même couleur.
b) Qu'en est-il de l'Ariège et du Tarn?
- 3) Combien y a-t-il de façons différentes possibles de colorier la carte de 10 départements à l'aide des trois couleurs en respectant la règle?
- 4) On s'intéresse dans cette question à la carte de 11 départements (avec le Tarn-et-Garonne repéré par le numéro 82). À quelle condition, *portant sur les coloriages précédents de la carte de 10 départements*, peut-on colorier cette carte de 11 départements à l'aide des 3 couleurs et en respectant la règle? Combien y a-t-il de coloriages possibles de la carte de 11 départements?

EXERCICE 2 : nombres échangeables

On définit, pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par : $f(x) = a - \sqrt{x + b}$.

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

- 1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
- 2) Peut-on en dire autant de 4 et 7?
- 3) À quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables?

EXERCICE 3 : le pli optimal

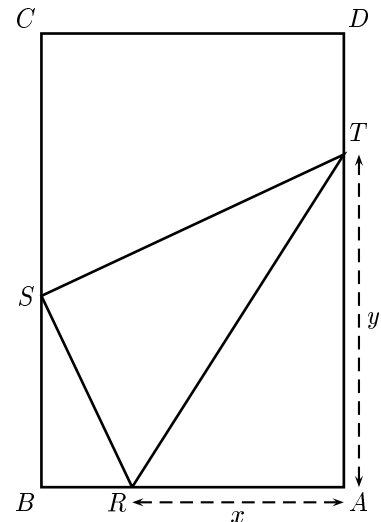
Soit $ABCD$ une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille).

On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-contre.

Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$ et $AT = y$.

- 1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x .
- 2) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.
- 3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?



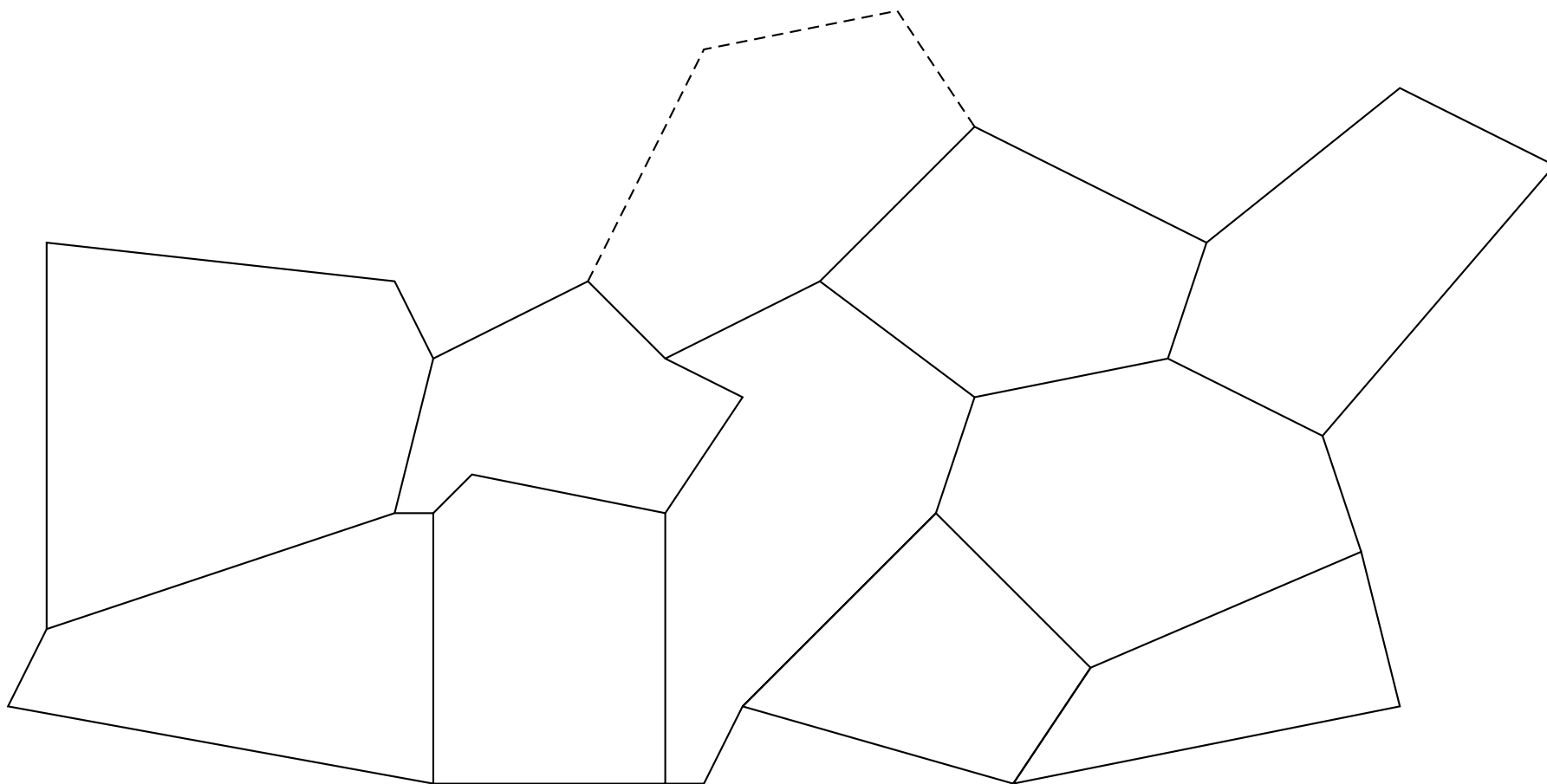
EXERCICE 4 : drôles de suites

La suite de chiffres : $(1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 1 ; 8 ; 9 ; 7 ; \dots)$ est obtenue comme suit :

- i) on choisit deux chiffres comme premiers termes (ici 1 puis 3) ;
- ii) à partir du troisième terme, on écrit, en suivant, le chiffre des unités de la somme des deux premiers termes précédents (par exemple, $4 + 7 = 11$; ainsi le chiffre 1 succède à 4 ; 7).

Ceci détermine une suite de chiffres.

- 1) Montrer que cette suite est périodique et déterminer sa période (le plus petit nombre de termes consécutifs qui se répètent à l'identique).
- 2) On s'intéresse aux suites définies de cette manière à partir d'un couple quelconque de deux chiffres comme premiers termes. Chaque couple détermine une suite.
 - a) Montrer que la donnée de deux termes consécutifs quelconques a et b d'une telle suite détermine complètement les termes suivants *et également ceux qui précèdent*.
 - b) Quels sont les deux premiers termes de la suite obtenue par les procédés i) et ii) et telle que le 2003^e terme vaut 6, et le 2004^e terme vaut 8?
- 3) Montrer que, quels que soient les deux premiers termes de la suite, celle-ci est périodique.



NOM et Prénom :

à rendre avec la copie