OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Toulouse

SESSION 2005

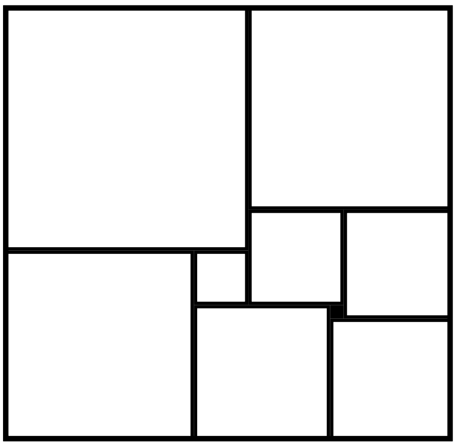
CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Avertissement : Le sujet propose cinq exercices indépendants. Chaque candidat doit traiter 4 exercices : les exercices 1, 2, 3 et 5 pour les candidats élèves des séries S. ou S.T.I. ; les exercices 1, 2, 3 et 4 pour les candidats des autres séries. Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 : un pavage (candidats toutes séries)

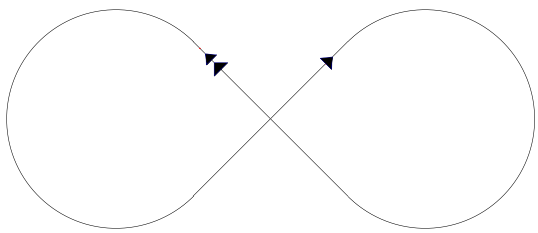
Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité. Quelles sont les dimensions du rectangle ?



Exercice 2 : Le lièvre et la tortue (candidats toutes séries)

La piste du champiodrome a la forme ci-contre : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.

Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, en empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).



Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour), hormis le départ, le lièvre abandonne.

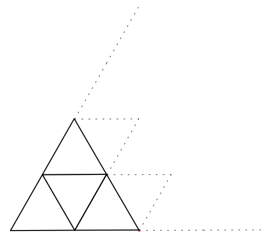
Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

Exercice 3 : les rayons de miel (candidats toutes séries)

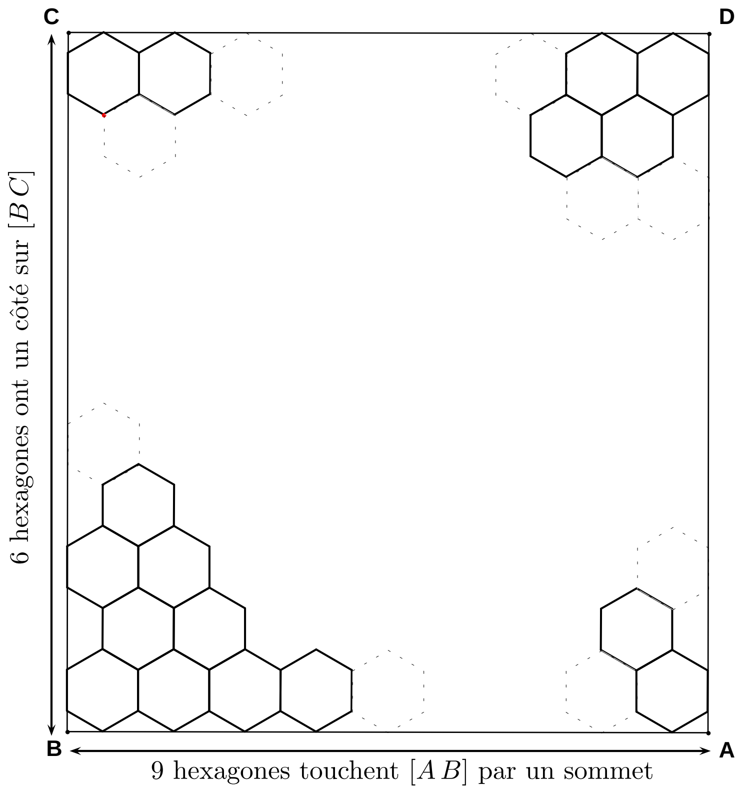
Les cellules formant les rayons de miel des ruches sont en forme d'hexagones réguliers. Pour expliquer ce phénomène, les entomologistes ont récemment émis une hypothèse « économique » que nous allons essayer de comprendre. En effet, pourquoi des hexagones plutôt que des carrés ou des triangles ?

1. Soit un carré de 10 cm de côté, recouvert par des petits carrés de 1 cm de côté. Quelle est l'aire totale de ces petits carrés ? Quelle est la longueur totale de leurs bords (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?
2. On considère un « grand » triangle équilatéral recouvert par des « petits » triangles équilatéraux de 1 cm^2 d'aire (voir le dessin ci-dessous).

   On suppose que la longueur d'un côté du « grand » triangle fait 10 fois la longueur du côté d'un « petit ». Combien faut-il de « petits » triangles pour recouvrir le « grand » ? Quelle est la longueur totale des bords des « petits » triangles (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?

3. On considère enfin des hexagones réguliers d'aire 1 cm^2 disposés à l'intérieur d'un rectangle $ABCD$ comme ci-dessous, de telle sorte que 9 hexagones aient un sommet sur $[AB]$ et 6 hexagones aient un côté sur $[BC]$. Quel est le nombre total d'hexagones dans le rectangle $ABCD$? Quelle est la longueur totale des bords de ces hexagones (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois)?



4. Quel avantage les abeilles trouvent-elles à construire des cellules à cloisons hexagonales plutôt que carrées ou triangulaires, ceci à aires égales pour les cellules de ces trois différentes formes ?

Exercice 4 : concombres et champignons (candidats autres séries que S. et S.T.I.)

1. Un concombre de 300 grammes est cueilli à 98 % d'eau. Après transport, à la livraison, il ne contient plus que 97 % d'eau.
   Quelle est alors sa masse ?
2. D'après vous, qui est de bonne foi dans la scénette de marché aux légumes suivante, et pourquoi ?

   « Mes champignons sont très frais, ils sont composés à 99% d'eau, c'est un régal de fraîcheur ! » clame le marchand.
   Louise : « Je vous en achète 2 kilos, que vous voudrez bien me livrer demain.»
   Le lendemain, à la livraison, Louise : « Dites donc, ils ont perdu au moins la moitié de leur poids, vos champignons ! »
   « C'est impossible, Madame, ils contiennent encore 98% d'eau ! » réplique le marchand.

Exercice 5 : les skieurs attendent (candidats séries S. et S.T.I.)

Une file de n skieurs portant des dossards numérotés de 1 à n (n sera appelé « effectif ») attend à un téléski. Ils sont placés dans la file suivant l'ordre de leur dossard. Le perchman fait passer un skieur sur deux, et le suivant va se remettre au bout de la file. Le skieur de dossard 1 passe en premier. Le problème est de déterminer le dossard du skieur qui passera en dernier.

1. Indiquer le dossard du skieur qui passera en dernier, ceci pour chacun des effectifs donnés dans le tableau ci-dessous (reproduire le tableau sur la copie) :

Effectifs	9	10	11	12	13	14	15	16	17
dernier									

2. (a) Quel est le dossard du skieur qui passe en dernier pour un effectif de 27 skieurs ? de 54 skieurs ? Justifier les réponses.
   (b) Exposer une *méthode* permettant de répondre à cette question pour un effectif plus important, par exemple en se ramenant à un effectif plus faible que celui proposé (il n'est demandé ni « formule », ni démonstration.)
3. Le perchman fait maintenant passer 2 skieurs sur 3, en commençant par les dossards 1 et 2, les recalés revenant comme précédemment se remettre en bout de file.
   Quel est le dossard du skieur qui passe en dernier si l'effectif vaut 3^p, p étant un entier naturel non nul ? Justifier la réponse !