

# OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Toulouse

SESSION 2007

## CLASSES DE PREMIÈRE

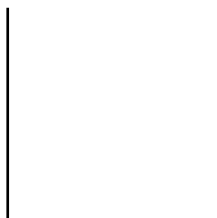
DURÉE : 4 heures

*Avertissement : Le sujet propose cinq exercices indépendants. Chaque candidat doit traiter 4 exercices : les exercices 1, 2, 4 et 5 pour les candidats élèves des séries S ; les exercices 1, 2, 3 et 5 pour les candidats des autres séries. Les calculatrices sont autorisées.*

### Exercice 1 : mon chat (candidats toutes séries)

Mon chat déteste la pluie. Lorsqu'il pleut, il cherche un abri et se met le plus loin possible du bord de l'abri.

1. Ainsi, sous la table du jardin, qui est un carré de 1 m de côté, il se blottit sous le centre de la table et n'en bouge plus. À quelle distance est-il du bord de la table?
2. Lorsqu'il est à l'abri sous une table rectangulaire de côté 0,90 m sur 1,80 m, le chat se déplace sur un segment de droite.
  - (a) Quelle est la longueur de ce segment?
  - (b) De manière plus générale, quelle relation peut-on établir entre la longueur  $L$ , la largeur  $\ell$  (de la table rectangulaire) et la longueur  $c$  du segment sur lequel se déplace le chat?
  - (c) Proposer un autre abri lui permettant de se déplacer sur un segment de longueur 0,9 m et dont l'aire est inférieure à celle de l'abri proposé au a).
3. Mon chat peut-il rêver d'un abri qui lui permettrait de se promener sur le long de deux segments perpendiculaires et de même longueur? Si oui, dessiner un tel abri et justifier le songe du chat, sinon montrer pourquoi ce n'était qu'un rêve de félicidé.



### Exercice 2 : un problème de tas (candidats toutes séries)

On dispose de 7 objets que l'on peut répartir en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.

Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

*Exemple* : une répartition possible au départ sera notée  $(4, 3)$  ; elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets. Après une manipulation, on obtiendra donc la répartition  $(3, 2, 2)$ .

*Avertissement* : on considère que les répartitions  $(4, 3)$  et  $(3, 4)$  sont identiques. De même, les répartitions  $(3, 2, 2)$ ,  $(2, 3, 2)$  et  $(2, 2, 3)$  sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc  $(7)$ .  
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations? Après 7 manipulations? Après 11 manipulations? Après 2007 manipulations?
2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition  $(4, 2, 1)$ .  
Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.
3. Paul et Virginie jouent ensemble.  
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.  
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions. Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue?

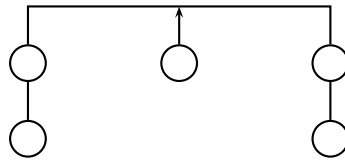
**Exercice 3 : la balance** (candidats des séries autres que la série S)

Une balance est constituée de plateaux contenant chacun un seul poids; éventuellement elle comporte un plateau sur l'axe.

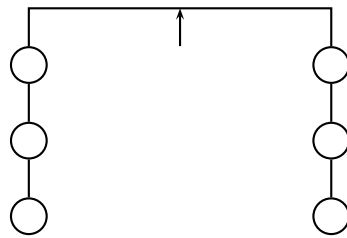
On dispose de poids numérotés. La masse de chaque poids est égale à son numéro. (Le poids n°1 pèse 1 g, le poids n°2 pèse 2 g...).

Le poids placé sur l'axe de la balance, s'il y en a un, n'a pas d'influence sur l'équilibre. À chaque fois, si l'on a besoin de  $k$  poids, on utilise les poids numérotés de 1 à  $k$ .

1. (a) On veut réaliser un équilibre sur la balance ci-dessous en utilisant tous les poids de 1 à 5. Proposer une répartition. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de réaliser un équilibre en plaçant le poids 2 sur l'axe.



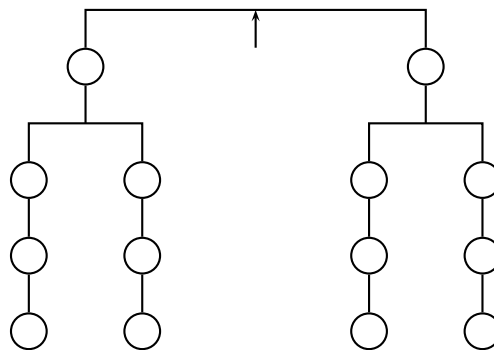
- (b) On veut réaliser un équilibre sur la balance ci-dessous en utilisant tous les poids de 1 à 6. Pouvez-vous proposer une répartition?



2. On veut réaliser un équilibre en utilisant tous les poids de 1 à 9. On place donc un poids sur l'axe et 4 poids de chaque côté.

- (a) Proposer une répartition en plaçant le poids n° 5 sur l'axe.  
(b) Proposer une répartition en plaçant le poids n° 1 sur l'axe. Est-ce possible avec le n° 9?

3. Peut-on réaliser un équilibre avec les poids de 1 à 14 sur la balance ci-dessous?



#### Exercice 4 : le mauvais sujet (candidats des séries S.)

1. Dans une classe de lycée (dont l'effectif est réglementairement limité à 35 élèves), tous les élèves passent un test auquel il faut obtenir au moins 65 pour le réussir. La moyenne générale est de 66, la moyenne des reçus de 71 et la moyenne des recalés de 56.

Quelle est la proportion de reçus par rapport à l'effectif de la classe ?

2. À la suite d'une erreur mineure dans le sujet, le jury décide d'ajouter 5 points à tous les élèves. La moyenne des reçus passe alors à 80 et celle des recalés à 47. Toutes ces moyennes sont exactes (autrement dit ce sont des nombres entiers).

Trouver le nombre d'élèves reçus en plus et le nombre d'élèves de la classe.

**Rectificatif :** moyenne des reçus 74 au lieu de 80.

#### Exercice 5 : des trapèzes de même aire (candidats toutes séries)

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels  $(m, p)$  tel que :  $m^2 - p^2 = 8$  ?

En existe-t-il plusieurs ?

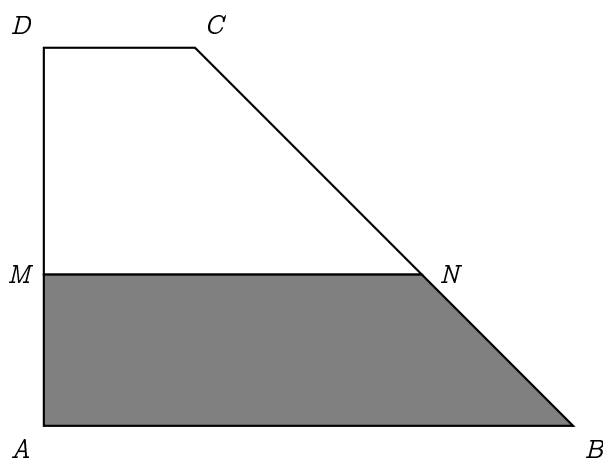
(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter.)

2. On considère les trapèzes rectangles  $ABCD$  de bases  $[AB]$  et  $[CD]$  tels que :

- $\widehat{ABC} = 45^\circ$  ;

- les distances  $AB$ ,  $AD$  et  $CD$  sont des nombres entiers, et  $AD > 2$ .

Soit  $M$  le point du segment  $[AD]$  tel que  $AM = 2$ .



Déterminer les distances  $AB$ ,  $AD$  et  $CD$  de sorte que les aires des trapèzes  $MNCB$  et  $MNCD$  soient égales.

*Indication : on pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.*