OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Toulouse

SESSION 2008

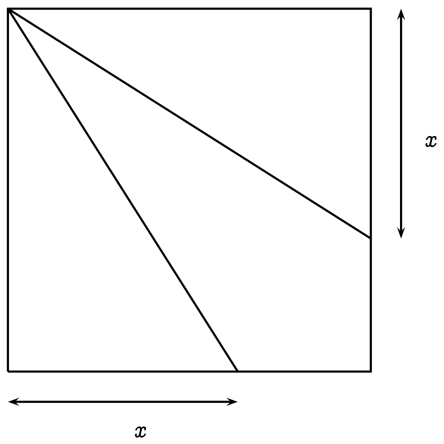
CLASSES DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

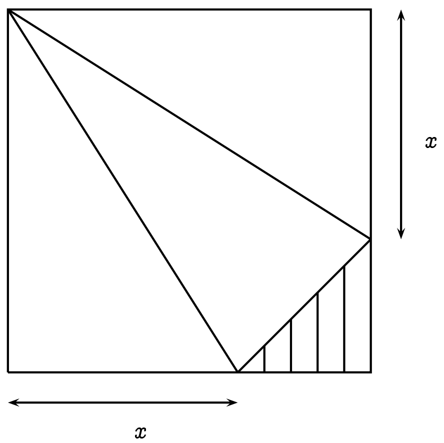
*Avertissement : Le sujet propose cinq exercices indépendants. Chaque candidat doit traiter 4 exercices : les exercices 1, 2, 3 et 5 pour les candidats élèves de la série **S** ; les exercices 1, 2, 3 et 4 pour les candidats des autres séries. Les calculatrices sont autorisées.*

Il est rappelé que la qualité des explications est un critère important d'appréciation. D'autre part, les candidats sont aussi encouragés à rédiger leurs tentatives de recherche.

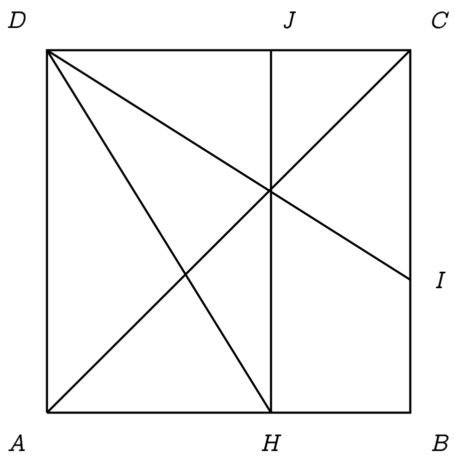
Exercice 1 : Un partage équitable (candidats toutes séries)



1) Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.
Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2) Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.
Peuvent-elles avoir la même aire ?



3) Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB). Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.
Qu'en est-il ?

<u>Exercice 2</u> : Chapeau les chameaux ! (candidats toutes séries)

Les questions sont indépendantes.

1. Un chamelier et son chameau, quand ils se déplacent, consomment pour leur subsistance une banane par kilomètre à eux deux. Ils doivent transporter des bananes d'une bananeraie A à une oasis B distante de 300 km. Il y a 20 000 bananes stockées au point A. Le chameau, un animal adulte très vigoureux ne peut porter que 2000 bananes au maximum en un chargement.
   Quel est le nombre maximal de bananes que le chamelier peut faire parvenir en B, en tenant compte du fait que, son travail accompli, il retourne, avec son chameau, à son point de départ A.
2. Parmi les bananes livrées au point B, 7 000 doivent être maintenant acheminées jusqu'à deux villes D et E, situées respectivement à 100 km et 200 km de l'oasis B dans des directions distinctes. Deux jeunes chameaux vont transporter ces bananes. Du fait de leur jeune âge, chacun ne peut transporter que 1 000 bananes au maximum en un seul chargement. La consommation de ces chameaux, et de leurs chameliers, est toujours de 1 banane par kilomètre. De plus, le même nombre de bananes exactement doit être livré, à la fin, à chacune des deux villes D et E, et les deux chameaux doivent revenir à leur point de départ.
   Proposer et justifier un ensemble de trajets effectués par ces deux chameaux, permettant de livrer effectivement le plus grand nombre de bananes possible aux villes D et E.
3. En partant de la bananeraie A, le chamelier et son chameau vigoureux qui peut porter jusqu'à 2000 bananes en un seul chargement doivent maintenant transporter des bananes jusqu'à une ville C située à 1 000 km de A. Comme précédemment, ils consomment une banane par kilomètre. Il y a maintenant 3 200 bananes stockées au point A. Son travail achevé le chamelier reste à la ville C. Dans ces conditions le chamelier constate que ce qu'il peut faire de mieux est de faire parvenir 1000 bananes à la ville C en effectuant un seul aller mais en laissant 1200 bananes à la bananeraie. Le chamelier se propose alors, pour ce transport, d'utiliser un point de stockage intermédiaire I, situé à une distance x de A et de faire des allers-retours.
   Comment doit s'organiser le chamelier pour faire parvenir un nombre maximum de bananes en C ? Décrire en détail le trajet effectué, préciser la position choisie pour le point de stockage intermédiaire et préciser le nombre de bananes acheminées en C.

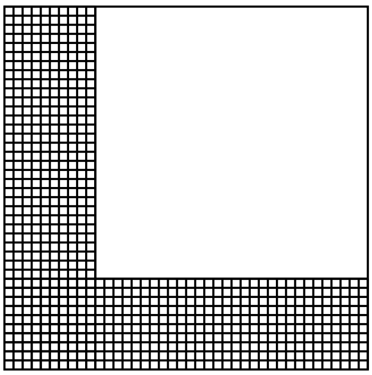
<u>Exercice 3</u> : Les bons nombres (candidats toutes séries)

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1. On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».
Ainsi, par exemple : $2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant $1 + 1$). $3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ». Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

<u>Exercice 4</u> : Nombres L (candidats des séries autres que la série S)

Dans une feuille de papier quadrillé, on a découpé un carré en s'aidant du quadrillage : la longueur du côté correspond à un nombre entier de carreaux. Dans ce carré de papier, on enlève, toujours en s'aidant du quadrillage, un carré plus petit (confère figure ci-dessous).



Le carré enlevé a donc pour côté un nombre entier de carreaux. On appelle L le polygone restant ; son aire n est un nombre entier de carreaux. Ainsi, si le grand carré a pour côté 4, le petit pour côté 2, L a pour aire $n = 16 - 4 = 12$ carreaux. On se demande si l'aire de L peut être n'importe quel entier naturel.

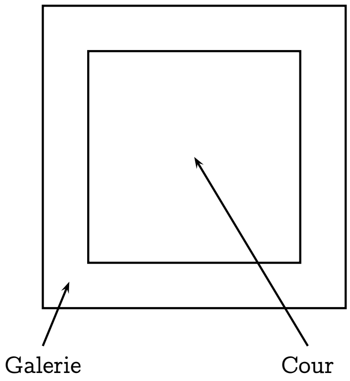
1. Quelles sont les aires que l'on peut obtenir pour L lorsque le grand carré a 5 carreaux de côté ?
2. Trouver les dimensions d'un grand carré et d'un petit permettant d'obtenir un polygone L ayant 3 carreaux pour aire.

3. Peut-on obtenir $n = 15$ carreaux? De combien de façons différentes?
4. Plus généralement, dans le cas où n est impair, peut-on trouver un grand carré et un petit carré permettant d'obtenir un polygone L ayant une aire d'exactement n carreaux?
5. Et dans le cas où n est pair?

<u>Exercice 5</u> : Constructions à la manière des compagnons du Moyen-Âge (candidats de la série S)

Un cloître est constitué d'une cour intérieure centrale entourée d'une galerie latérale. La forme des cloîtres est généralement carrée et, est telle que l'aire de la galerie est égale à celle de la cour centrale (voir figure 1).

Figure 1

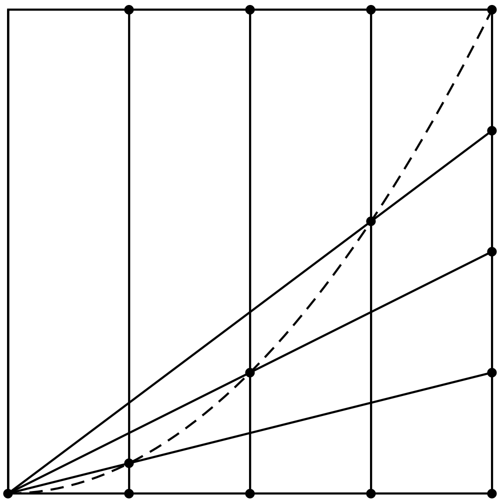


Les compagnons ont construit un mur extérieur délimitant un enclos carré que l'on veut aménager comme un cloître. Ils disposent pour cela de cordes qu'ils peuvent :

- tendre entre deux points, ce qui permet de tracer des segments de droites ;
- tendre à partir d'un point fixe, ce qui permet de tracer des arcs de cercle.

1. Proposer une méthode permettant de tracer dans l'enclos un carré délimitant la future cour intérieure centrale du cloître.
2. Les compagnons ont tracé, dans la cour intérieure, un chemin. Voici la construction qui a été réalisée :

Figure 2



Comment les compagnons ont-ils pu partager les côtés du carré en 4 parties égales avec leurs cordes?
L'idée des compagnons serait de poursuivre en partageant en 8, puis en 16, etc. Le chemin a été ébauché en pointillés sur la figure 2. Que dire de sa forme possible?