OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Toulouse
SESSION 2009

CLASSES DE PREMIÈRE
DURÉE : 4 heures

Avertissement : Le sujet propose six exercices indépendants. ***Chaque candidat doit traiter seulement quatre exercices selon la répartition suivante*** *:*

- *candidats élèves de la série S : traiter les exercices 1, 2, 5 et 6 ;*
- *candidats élèves des autres séries : traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.*

Les calculatrices sont autorisées.
Il est rappelé que la qualité des explications est un critère important d'appréciation.
D'autre part, les candidats sont aussi encouragés à rédiger sur la copie leurs tentatives de recherche même non abouties.

Exercice 1 : Les triangles magiques (*candidats élèves de toutes séries*)

Partie A : Questions préliminaires :

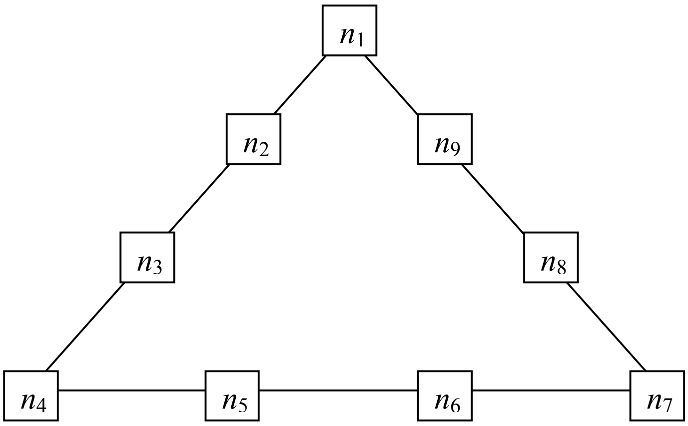
On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?

2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

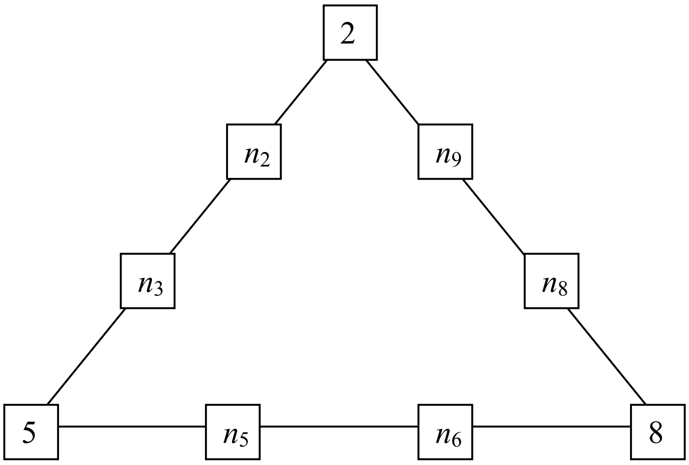


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.

b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$

c. Donner la liste des couples $(S\ ,\ T)$ ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.

b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2 : Le pli en diagonale (*candidats élèves de toutes séries*)

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.

Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.

Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3 : Le distributeur (*candidats élèves des séries autres que la série S)*

Des DVD de films peuvent être loués pour 24 heures à un distributeur automatique selon deux tarifs :
- 5 euros pour les « nouveautés ».
- 3 euros pour les films plus anciens.

1- Un client peut-il dépenser exactement 13 euros pour louer des DVD à ce distributeur ?

2- Un certain soir, entre 19h et 20h, le distributeur a enregistré une recette de 45 euros. Combien de films anciens ont-ils pu être loués pendant cette période ? Donner tous les cas possibles.

3- Le distributeur peut-il enregistrer des recettes de 101, 102, 103 euros ? Si oui comment ? Si non pourquoi ?

4- En supposant que le distributeur n'est jamais en rupture de stock, quelles sont toutes les recettes possibles ?

Exercice 4 : Ce soir c'est la fête ! (*candidats élèves des séries autres que la série S)*

1- Pour la Saint-Fiacre, un banquet de neuf couverts est prévu autour d'une table ronde. Lorsque Jean-Marie arrive, certains invités sont déjà attablés et Jean-Marie constate qu'il doit nécessairement s'installer à côté de l'un d'eux.
Combien y a-t-il, au minimum, d'invités déjà attablés à l'arrivée de Jean-Marie ? Décrire leurs positions respectives dans ce cas « minimal ».

2- La même question se pose à l'occasion du banquet républicain de la Sainte-Barbe.
Quarante couverts sont disposés autour d'une table ronde et Jean-Marie, lorsqu'il arrive, est obligé de s'installer à côté d'un convive déjà attablé.
Combien y a-t-il, au minimum, d'invités déjà attablés à l'arrivée de Jean-Marie ?
Décrire plusieurs dispositions possibles dans ce cas « minimal ».

3- La légende raconte que, lorsque le barde Joachim et ses deux amis arrivèrent au dîner d'anciens de la guerre des Gaules auquel ils étaient invités, ils ne purent s'asseoir tous les trois côte à côte.
Sachant que la table était rectangulaire et comportait quarante couverts, vingt de chaque côté et aucun en bout de table, combien de Gaulois, au minimum, étaient déjà attablés à l'arrivée du barde et de ses amis ?
Présenter plusieurs dispositions des convives déjà installés dans ce cas « minimal ».

Exercice 5 : En Egypte *(candidats élèves de la série S)*

Dans l'Antiquité, les Egyptiens utilisaient essentiellement les fractions de numérateur 1 et de dénominateur un entier naturel non nul, qu'on appelle maintenant fractions égyptiennes.

Dans le problème, on s'intéresse à la possibilité d'écrire la fraction $\frac{4}{N}$, avec N entier naturel, $N > 2$, sous la forme d'une somme trois fractions égyptiennes.

On cherche donc a, b et c entiers naturels, non nuls, tels que : $\frac{4}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

En 1950, le mathématicien hongrois Paul ERDÖS (1913-1996) a conjecturé que cette décomposition de la fraction $\frac{4}{N}$ était toujours possible pour $N > 2$.

On étudie ici ce problème pour différentes formes de l'entier N.

1- Etude du cas où N est pair, $N > 2$.

a. Trouver une décomposition de $\frac{4}{2008}$ et de $\frac{4}{2010}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

b. Plus généralement, peut-on, pour tout entier naturel N pair, $N > 2$, décomposer la fraction $\frac{4}{N}$ en somme de trois fractions égyptiennes ? Justifier.

2- Etude du cas où N est impair et de la forme $4k$ -1 avec k entier naturel non nul.

a. Décomposer $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{11}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

b. Plus généralement, peut-on, pour tout entier naturel N pouvant s'écrire $N = 4k - 1$ avec k entier naturel non nul, décomposer la fraction $\frac{4}{N}$ en somme de trois fractions égyptiennes ?

3- Etude de deux exemples où N est impair mais pas de la forme précédente.

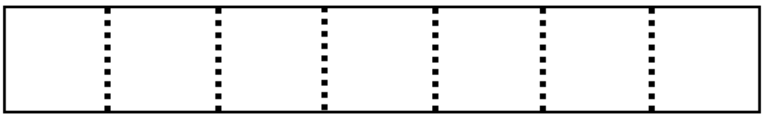
a. Décomposer $\frac{4}{41}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

b. Donner plusieurs décompositions de $\frac{4}{2009}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

4- A supposer qu'on veuille prouver que la conjecture de Paul ERDÖS est fausse, proposer des entiers naturels ou des familles d'entiers naturels auxquels on devrait encore s'intéresser.

Exercice 6 : Les timbres d'Eliott *(candidats élèves de la série S)*

Eliott achète un carnet de timbres comportant sept timbres disposés « en bande » séparés par une ligne prédécoupée en pointillés comme sur la figure :



Chaque timbre a pour valeur 1 Phoebus.

1- Eliott pense qu'en détachant seulement le troisième timbre – par découpage des deux lignes en pointillés correspondantes - il peut réaliser tous les affranchissements de valeur entière entre 1 et 7 Phoebus. A-t-il raison ?

2- Il achète un nouveau carnet de timbres plus long pour lequel les timbres sont toujours disposés en bande. En découpant exactement trois lignes en pointillés, il remarque qu'il peut de nouveau réaliser tous les affranchissements de valeur entière entre 1 et k Phoebus où k est un entier naturel. Déterminer le nombre k le plus grand possible pour qu'il en soit ainsi.

Eliott se met à rêver de carnets de timbres de plus en plus longs …

3- Reprendre la question précédente en découpant six lignes en pointillés d'un nouveau carnet.

4- Combien de découpes devrait prévoir Eliott s'il devait atteindre tous les affranchissements de valeur entière de 1 à 2009 Phoebus ?

On pourra utiliser la formule : $1+2+2^2+...+2^n = 2^{n+1}-1$, vraie pour tout entier naturel n.