OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Toulouse
SESSION 2010

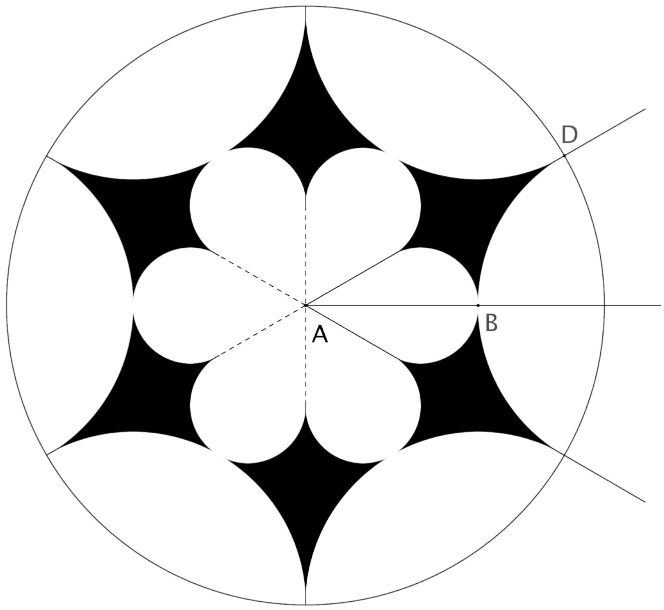
CLASSES DE PREMIÈRE
DURÉE : 4 heures

Avertissement : Le sujet propose six exercices indépendants. ***Chaque candidat doit traiter seulement quatre exercices selon la répartition suivante*** *:*
- *candidats élèves de la série S. : traiter les exercices 1, 2, 5 et 6 ;*
- *candidats élèves des autres séries : traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.*

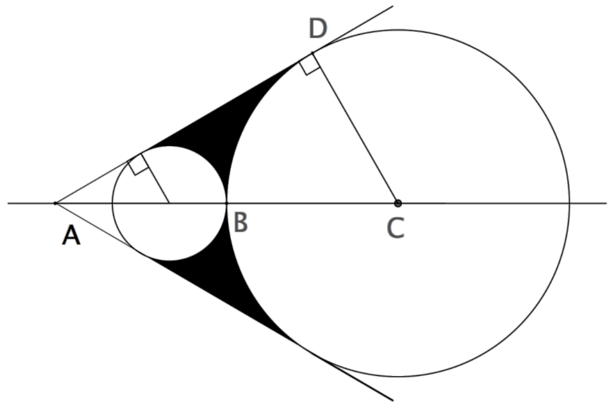
Les calculatrices sont autorisées.
Il est rappelé que la qualité des explications est un critère important d'appréciation.
D'autre part, les candidats sont aussi encouragés à rédiger sur la copie leurs tentatives de recherche même non abouties.

Exercice 1 (national) : ***La Rosace*** *(tous candidats)*
Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que AB = BC.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.
   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

<u>Exercice 2 (national) :</u> ***A la recherche du « chaînonze »*** *(tous candidats)*

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^e chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.
   - 4.1.1. Etudier le cas particulier « *a a* ».
   - 4.1.2. Etudier le cas b = a – 1.
   - 4.1.3. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

<u>Exercice 3 (académique) :</u> ***Au ski …*** *(candidats élèves des séries autres que la série S.)*

Bien assis sur l'une des 100 banquettes du télésiège, se reposant skis aux pieds pendant que celui-ci le remonte en haut des pistes, Ludovic observe les numéros des banquettes qu'il croise. Les 100 banquettes sont successivement numérotées de 1 à 100, et **Ludovic dans sa montée croise les 99 banquettes autres que la sienne.**

1. Lors de sa première montée, il croise au moins 90 banquettes qui ont un numéro strictement inférieur au numéro de sa banquette. Il remarque de plus que le numéro de sa banquette est le triple du jour d'anniversaire de sa meilleure amie. Quel est le numéro de la banquette de Ludovic ?

2. Lors de sa deuxième montée, alors qu'il observe les numéros des banquettes qu'il croise, il s'aperçoit que le numéro de sa banquette est le produit des numéros des trois dernières banquettes qu'il vient de croiser. Par ailleurs, il note que la banquette qui le précède et celle qui le suit portent des numéros qui sont des nombres premiers. Quel peut être le numéro de sa banquette ?

3. Lors d'une dernière montée, Ludovic observe encore les banquettes qu'il croise … A l'arrivée, il peut dire que sept des banquettes croisées avaient un numéro divisant celui de sa banquette personnelle, mais que le numéro de sa banquette ne divisait que les numéros de trois des banquettes croisées. Quel est le numéro de la banquette de Ludovic ?

N.B. : *Un nombre premier est un nombre entier strictement supérieur à 1 et sans autre diviseur que le nombre 1 et lui-même.*

<u>Exercice 4 (académique) :</u> ***Friends*** *(candidats élèves des séries autres que la série S.)*

Imaginons un groupe de 7 amis étudiants : Rachel, Monica, Ross, Chandler, Janice, Joe et Phoebe.

Ils habitent New York et projettent de louer deux voitures pour aller passer des vacances en Floride. Chaque voiture peut transporter au maximum quatre personnes, chauffeur compris.

Toutefois, passer ensemble les 18 heures que dure le trajet peut s'avérer problématique si les occupants de chaque voiture ne sont pas soigneusement choisis.
En effet, il faut savoir que :

(1) : Rachel et Ross viennent de rompre ; il ne serait donc pas judicieux qu'ils voyagent ensemble.

(2) : Joe est amoureux de Rachel, il y a donc des tensions entre lui et Ross.

(3) : Phoebe tente d'attirer l'attention de Joe, mais celui-ci la repousse.

(4) : Chandler vient juste de piquer à Joe la place de capitaine de l'équipe de foot, et il en résulte un certain ressentiment.

(5) : Monica et Chandler sont jaloux de Janice, parce que, malgré un talent discutable (selon eux), elle est premier violon à l'orchestre de l'université alors qu'eux ne sont que seconds violons.

(6) : Monica pense que Joe n'est pas très malin.

1. Trouver une répartition des sept étudiants dans les deux voitures qui respecte ces différentes incompatibilités. Est-ce la seule possible ?

2. L'un des sept étudiants décide de rester en Floride. On constate alors qu'il y a quatre répartitions possibles pour le retour des six autres étudiants. Qui est resté en Floride et quelles sont les répartitions possibles pour le retour ?

<u>Exercice 5 (académique) :</u> ***Compensation*** *(candidats élèves de la série S.)*

En Pivoinie, les logements mis sur le marché locatif se partagent en deux catégories : les logements appartenant à des particuliers désireux de les louer, appelés « logements privés », et les logements appartenant à l'état, appelés « logements publics ».

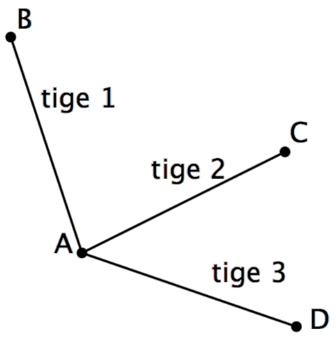
Dans ce pays, les propriétaires de logements privés sont imposés sur les loyers qu'ils reçoivent de leurs locataires. Le taux de cet impôt, fixé par le conseil des capitans, est de 20 % en 2010 et il est prévu qu'il soit de 25 % en 2011.

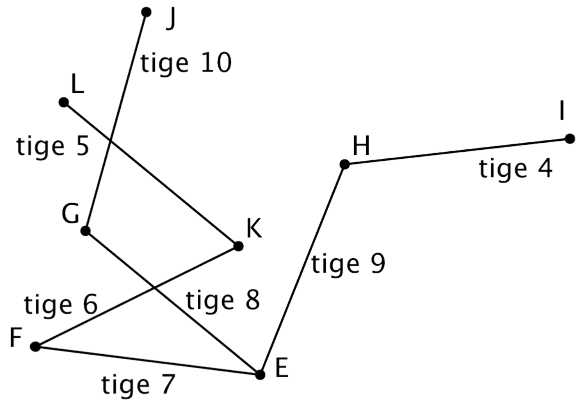
1. Les propriétaires de logements privés souhaitent que les revenus qu'ils tirent de la location de leur bien (impôt déduit) soient identiques en 2010 et 2011. De combien, en pourcentage, peuvent-ils augmenter les loyers réclamés à leurs locataires pour cela ?

2. On prévoit que l'évolution du parc des logements d'une année à l'autre sera très faible ; elle sera considérée comme négligeable. Les capitans, quant à eux, veulent pouvoir annoncer que la moyenne d'augmentation des loyers entre 2010 et 2011 sera de 3 % au plus. Pour atteindre cet objectif de communication, ils n'augmentent pas les loyers des logements publics entre 2010 et 2011. Quelle proportion du total des loyers représente le total des loyers des logements publics ?

<u>Exercice 6 (académique) :</u> ***Elise et son jeu de construction*** *(candidats élèves de la série S.)*

Elise possède un jeu de construction. Ce jeu est formé de tiges métalliques rigides de même longueur 3 *a* (où *a* désigne une unité de longueur donnée). On peut assembler ces tiges grâce à un système de clips. A l'extrémité d'une tige, il est possible de connecter plusieurs autres tiges.
Par exemple, les assemblages suivants sont possibles :



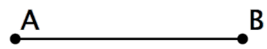


1. Un premier problème que rencontre Elise est que, en mettant bout à bout deux tiges, elle n'est pas certaine que celles-ci soient bien alignées. Comment parvient-elle à assurer cet alignement en utilisant d'autres tiges ?

Elise a des exercices à faire pour demain. Elle décide de les résoudre en utilisant uniquement son jeu de construction.
Dans la mesure où elle sait maintenant aligner parfaitement deux tiges, elle s'autorise toutefois, pour gagner du temps, l'usage de sa vielle règle dont les graduations sont effacées par l'usure.

Exercice 1
Construire un segment parallèle à la droite (d) passant par le point A, situé à une distance de valeur 2 *a* de la droite (d).

Exercice 2
Construire le milieu du segment [AB] de longueur 3 *a*.

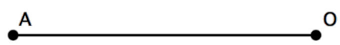


2. Elise peut-elle réaliser ces deux constructions uniquement avec son jeu et sa règle, et si oui comment ?

3. Elise pourrait-elle construire le milieu du segment [AB] avec son jeu de construction et sa règle pour une valeur quelconque de la distance AB ? Expliquer.

4. Il reste à Elise un dernier exercice à faire :

Exercice 3
Construire le symétrique du point A par rapport au point O, où OA = 4 *a*.



a. Elise peut-elle réaliser cette construction uniquement avec son jeu et sa vieille règle, et si oui comment ?
b. Elise pourrait-elle construire le symétrique du point A par rapport au point O avec son jeu de construction et sa vieille règle pour une valeur quelconque de la distance OA ? Expliquer.