Académie de TOULOUSE
et
Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2016
Classes de Première
Mercredi 16 mars de 10 heures 10 à 12 heures 10

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

***Avertissement** :*
• Le sujet comporte quatre pages.
• Veiller à informer précisément les entêtes, numéro et nombre de pages sur chaque copie.

• Les candidats élèves de la série S doivent traiter les exercices 1 et 3 ;
les candidats élèves des autres séries doivent traiter l'exercice 1 (sauf la partie C) et l'exercice 2.

• Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

• Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Et partenaires en Midi-Pyrénées : Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, Ecole Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Ecole d'Economie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, AIRBUS Defense and Space, Centre National d'Etudes Spatiales, Cité de l'Espace, Science Animation, Union Régionale des Ingénieurs et Scientifiques de Midi Pyrénées, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 (parties A, B tous candidats ; partie C uniquement les candidats élèves en série scientifique) – « Autour du jeu de Sim »

A) Un jeu simplifié à cinq points

On dessine cinq points A, B, C, D, E dans le plan en évitant qu'il y ait trois points alignés.

Deux joueurs jouent à tour de rôle. Le premier (appelé Plein) trace un trait plein entre deux de ces cinq points. Le second (appelé Tiret) trace à son tour un trait formé de petits tirets entre deux de ces points.

Ensuite c'est de nouveau à Plein de jouer, et ainsi de suite. Lorsque deux points sont déjà reliés, ils ne peuvent l'être à nouveau par la suite.

Dès qu'un joueur réalise un triangle avec ses traits, il a perdu.

Ainsi sur la figure ci-dessous, c'est à Plein de jouer, mais s'il joue [AD] il perd car cela termine un triangle ABD tracé en traits pleins.

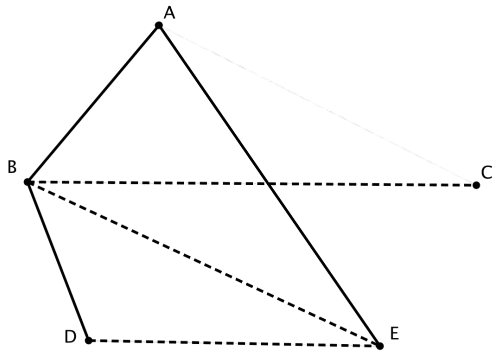


Figure 1

Déroulement du jeu :
1- Plein trace [AB]
2- Tiret trace [BC]
3- Plein trace [AE]
4- Tiret trace [DE]
5- Plein trace [BD]
6- Tiret trace [BE]

Si tous les traits possibles entre les cinq points ont été tirés sans que personne ne perde, la partie est déclarée nulle.

1) Voici un nouveau début de partie.

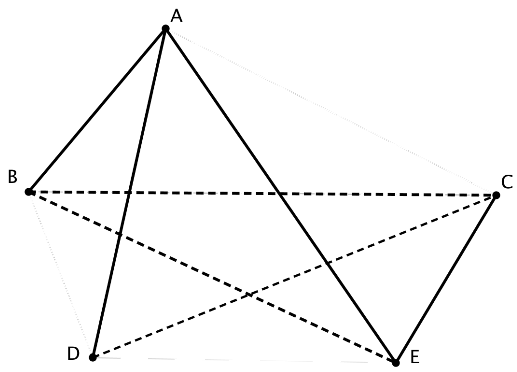


Figure 2

Déroulement du jeu
1- Plein trace [AB]
2- Tiret trace [BC]
3- Plein trace [AE]
4- Tiret trace [BE]
5- Plein trace [AD]
6- Tiret trace [CD]
7- Plein trace [CE]

C'est maintenant à Tiret de jouer.

Proposer une manière de jouer pour Tiret au huitième coup afin qu'il gagne à coup sûr.

2) Voici un nouveau début de partie.

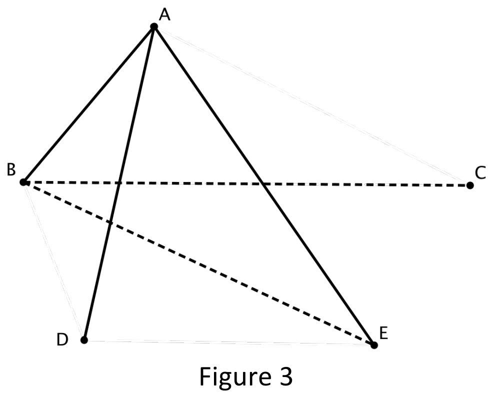


Figure 3

Déroulement du jeu
1- Plein trace [AB]
2- Tiret trace [BC]
3- Plein trace [AE]
4- Tiret trace [BE]
5- Plein trace [AD]

C'est à Tiret de jouer.

Proposer une manière de jouer pour Tiret au sixième coup afin qu'il gagne à coup sûr.

3) Montrer que la partie associée à la figure 1 décrite dans le préambule peut s'achever par une partie nulle.

4) Si à un moment de la partie il y a trois traits du même type issus d'un même sommet, expliquer pourquoi il ne peut pas y avoir de partie nulle.

B) 1) Le jeu de Sim ordinaire, jeu imaginé en 1969 par le mathématicien américain Gustavus James Simmons
On reprend les mêmes règles que précédemment, mais avec six points A, B, C, D, E, F (tels qu'on n'en trouve jamais trois alignés).
Montrer que dans ce cas, il n'y a jamais de partie nulle.

2) Plus de points
On reprend les mêmes règles que précédemment, mais avec un nombre n de points, $n > 6$ (tels qu'on n'en trouve jamais trois alignés).
Montrer que dans ce cas, il n'y a jamais de partie nulle.

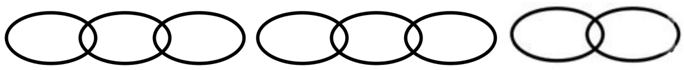
- - - - - - - - - - - question suivante uniquement pour les candidats élèves en série scientifique - - - - - - - - - - - -

C) Trois joueurs (candidats élèves en série scientifique seulement)
On reprend encore les mêmes règles, avec un nombre $n > 6$ de points (tels qu'on n'en trouve jamais trois alignés).
Cette fois il y a trois joueurs.
A partir de quelle valeur de n pensez-vous pouvoir garantir qu'il n'y aura jamais de partie nulle ? Justifier.

Exercice 2 (candidats élèves des séries autres que la série S.) – « Bracelets »

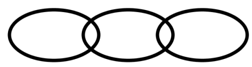
Sophie et Martin réalisent des bracelets à partir de morceaux de chaine dont ils peuvent ouvrir et refermer des maillons.

1) Sophie dispose de deux morceaux de chaine comportant chacun trois maillons et d'un autre comportant deux maillons.

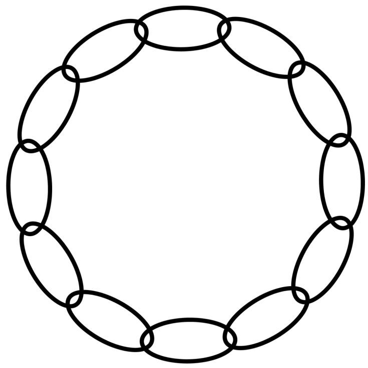


Expliquer comment elle peut réaliser un bracelet de huit maillons en ouvrant et en refermant seulement deux maillons.

2) Martin, lui, dispose uniquement de morceaux de chaine ayant trois maillons.
Il veut en faire des bracelets en ouvrant le moins possible de maillons et en utilisant tous les maillons.



Un morceau de chaîne



Un bracelet de douze maillons

   a) Montrer que, pour avoir un bracelet de douze maillons en utilisant quatre morceaux de chaine, il lui suffit d'ouvrir et de refermer seulement trois maillons.
   Martin peut-il faire mieux ?
   b) Il utilise maintenant huit morceaux de chaine pour fabriquer un bracelet.
   Quel est le nombre minimum de maillons à ouvrir ?
   c) Et s'il s'agit de former un bracelet avec sept morceaux de chaine ?
   d) A supposer que Martin ait 672 morceaux de chaine, chacun de trois maillons, quel nombre minimum de maillons devra-t-il ouvrir pour former un bracelet de 2016 maillons ?
   e) Qu'en serait-il pour un bracelet respectivement de 2013, 2019, 2022 maillons ?

Exercice 3 (candidats élèves en série S.) – « Vous avez dit ½ ? »

Chloé veut acheter un couple de poissons rouges (un mâle et une femelle) pour son nouvel aquarium. Pour cela, elle se rend dans une animalerie où elle rencontre un vendeur un peu loufoque qui semble passionné de mathématiques.

1) Le vendeur commence par lui montrer un premier aquarium qui contient quatre poissons rouges (un mâle et trois femelles). Il lui indique que si elle choisit au hasard successivement deux poissons dans cet aquarium, la probabilité d'avoir un mâle et une femelle est égale à ½.
   Justifier les propos du vendeur.

2) Le vendeur lui montre ensuite un deuxième aquarium qui contient neuf poissons rouges. Il lui dit à nouveau que si elle choisit au hasard deux poissons dans cet aquarium, la probabilité d'avoir un mâle et une femelle est égale à ½. Déterminer une répartition possible entre mâles et femelles dans cet aquarium.

3) a) Chloé, amusée par ce vendeur, commence à se prendre au jeu … elle réfléchit et arrive à la conclusion :

   « Pour que la probabilité d'obtenir un mâle et une femelle en choisissant au hasard deux poissons dans un aquarium donné soit égale à ½, il faut que le nombre total de paires que l'on peut constituer avec les poissons de cet aquarium soit pair. »

   N.B. : On appelle « paire » de poissons les ensembles du type $\{P_1, P_2\}$, où P_1 et P_2 sont deux poissons distincts.

   On a rappelle que $\{P_1, P_2\} = \{P_2, P_1\}$.

   Expliquer la conclusion de Chloé.

   b) Du coup, Chloé réagit vivement lorsque le vendeur lui annonce que dans un autre aquarium avec 70 poissons, la probabilité d'obtenir un mâle et une femelle en choisissant au hasard deux poissons est égale à ½. Expliquer pourquoi.

4) Pendant que le vendeur, vexé, lui expose ses théories probabilistes, Chloé continue à réfléchir. Envisageant un nombre de poissons dans l'aquarium compris entre 30 et 50, elle affirme : « *Je peux trouver une répartition entre mâles et femelles dans l'aquarium pour qu'en prenant deux poissons au hasard la probabilité d'obtenir une femelle et un mâle soit égale à ½, mais à condition que le nombre total de poissons soit 36 ou 49* ».

   Dans la suite on s'intéresse au cas général. On étudie un aquarium théorique, de contenance illimitée, dans lequel se trouvent n poissons, n entier supérieur ou égal à 2.

   On note (H) la propriété : « il y a une répartition entre mâles et femelles dans l'aquarium telle que, lorsqu'on choisit au hasard deux poissons, la probabilité d'obtenir un mâle et une femelle soit ½. »

   a) Avec la déclaration de Chloé, exprimer une conjecture à propos des valeurs de l'entier n pour lesquelles la propriété (H) est vraie.

   b) Démontrer cette conjecture.

   c) Pour un aquarium contenant n poissons (n entier supérieur ou égal à 2) et vérifiant la propriété (H), donner une répartition possible entre femelles et mâles.