ACADÉMIE DE TOULOUSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Académie de TOULOUSE
et
Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2021
Classes de Première
Mardi 23 mars 2021, deuxième partie de l'épreuve.
Durée 2 heures.

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

• Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6. **La page 6 est une annexe à rendre avec la copie.**

• **Les deux exercices sont à traiter par tous les candidats**, qu'ils suivent ou non l'enseignement de spécialité de mathématiques de la voie générale.

• On tiendra compte lors de la correction des différences de formation existant entre les candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques de la voie générale et les candidats ne suivant pas cet enseignement.

• L'emploi de la calculatrice est autorisé selon la règlementation en vigueur.

• Très important : veiller à informer précisément les entêtes, numéros de pages et nombre de pages sur chaque copie remise.

• Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Et partenaires de l'Académie de Toulouse: Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, École Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, École Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, École d'Économie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, Centre National d'Études Spatiales, Cité de l'Espace, Envol des Pionniers, Science Animation, Société des Ingénieurs et Scientifiques de France – délégation Occitanie, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 : Des grilles et des nombres

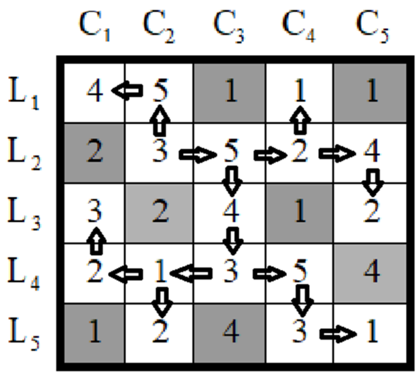
On considère une grille rectangulaire de *n* lignes et *m* colonnes, dont les cases contiennent des nombres entiers.
On numérote les lignes de haut en bas et les colonnes de gauche à droite. Ainsi, on note L_i la ligne *i*, pour *i* entier compris entre 1 et *n* et C_j la colonne *j*, pour *j* entier compris entre 1 et *m* .
On identifie chaque case par le numéro de la ligne et de la colonne qui la portent.
Ainsi, la case située ligne *i* et colonne *j* peut être appelée « case $(i;j)$ ».

On dit qu'une grille **a une solution** lorsque, après que certaines cases aient été grisées, elle respecte ***les 3 règles suivantes*** :

(R1) : Dans une même ligne (resp. une même colonne), il n'y a pas deux cases blanches contenant le même nombre.

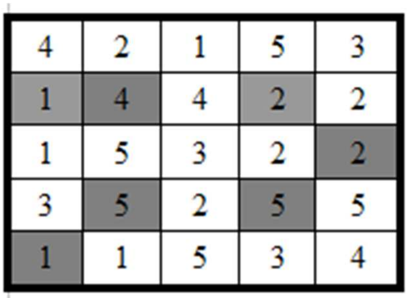
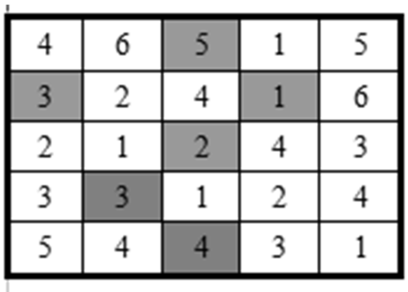
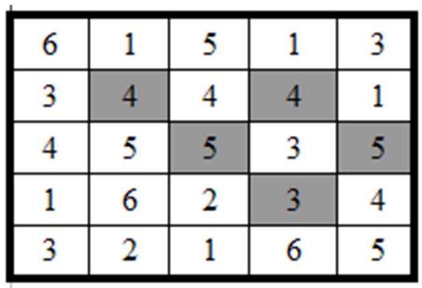
(R2) : Deux cases grisées n'ont pas de côté en commun.

(R3) : Les cases blanches peuvent toutes être reliées entre elles à l'aide de déplacements horizontaux et verticaux, comme représenté ci-contre.

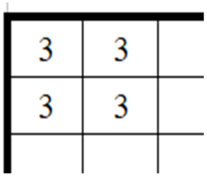


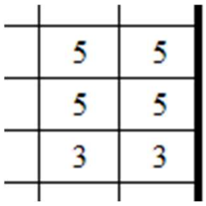
Les grilles comportant des cases grisées bien placées (par rapport aux règles ci-dessus) sont dites **« valides ».**

1. Les grilles ci-dessous ne sont pas valides.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, la ou les règles qui ne sont pas respectées.

Grille A	Grille B	Grille C
		

2. Dans les extraits de **grilles ayant des solutions** ci-dessous, on peut être sûr de la couleur de chaque case.





Reproduire sur la copie ces extraits de grilles et identifier les cases grisées et les cases à laisser blanches. (Griser les cases voulues, entourer les cases devant rester blanches ou les nombres qu'elles contiennent.)
Expliquer.

3. On considère la grille ci- dessous, donnée aussi en annexe.
Justifier les affirmations suivantes et identifier au fur et à mesure, **sur la grille figurant en annexe (page 6)**, la nature (blanche ou grise) des cases concernées.

2	5	5	1	3	4
3	4	2	4	2	5
4	1	3	2	5	3
1	4	3	5	3	3
5	4	4	3	1	2

a) En ligne 4, il faut griser la case (4 ; 3) qui contient le nombre 3.

b) La case (3 ; 3), la case (4 ; 2), la case (4 ; 4) et la case (5 ; 3) doivent rester blanches.

c) Les cases (5 ; 2) et (3 ; 6) doivent être grisées.

d) En ligne 2, la case (2 ; 3) doit rester blanche.

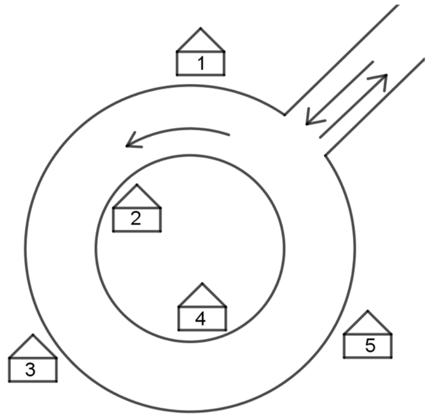
e) Les cases (5 ; 4) et (4 ; 1) doivent rester blanches.

4. **Sur l'annexe**, proposer une solution à la grille étudiée à la question 3).

5. Donner une solution à la grille ci-dessous, reproduite en annexe. En existe-t-il une autre ?

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1

Exercice 2 : la tournée du facteur



On s'intéresse à un jeu vidéo dans lequel un facteur doit livrer une lettre à chacune des maisons d'un quartier desservi par un rond-point.
Les maisons sont numérotées dans l'ordre croissant en tournant dans le sens indiqué sur le schéma.
Le joueur voit apparaître au fur et à mesure à l'écran les numéros des maisons où il doit déposer une lettre et doit piloter son véhicule autour du rond-point, toujours dans le même sens, de manière à effectuer sa tournée tout en évitant des pièges qui surviennent sur la route.

Par exemple :
- si l'écran affiche d'abord « 4 », le joueur devra faire un premier tour en distribuant la lettre à la maison n°4,
- puis s'il affiche « 1 », le joueur va alors entamer un deuxième tour en distribuant la lettre à la maison n°1,
- s'il affiche ensuite « 5 », le joueur poursuivra son deuxième tour et distribuera la lettre à la maison n°5.
- si pour terminer, l'écran affiche successivement « 2 » puis « 3 », un troisième et dernier tour permettra de distribuer les deux dernières lettres.

On notera :
- A : la liste formée des numéros des maisons successivement affichés lors d'une partie. A est appelée liste d'*affichage*.
- T : la liste indiquant pour chacune des maisons, dans l'ordre de leur numérotation, le tour pendant lequel la lettre lui a été distribuée. T est appelée liste de *distribution*.
- N : le nombre de tours effectués.

Dans l'exemple ci-dessus : A = (4 1 5 2 3), T = (2 3 3 1 2) et N = 3.

Première partie

1. Donner la liste T correspondant à la liste A = (3 4 1 2 5).
2. Donner une liste A pour laquelle N=1 et une liste A pour laquelle N=5.
On admettra que ce sont les seules possibles.
3. Donner une liste A pour laquelle N = 4.
4. Donner une liste A correspondant à la liste T = (1 2 1 3 2).
5. Pourquoi est-il impossible d'obtenir les listes T suivantes ?

a. T = (3 1 1 1 3) **b.** T = (1 1 1 2 2)

Deuxième partie

Pour une liste d'affichage A donnée, on note $\overline{\text{A}}$ la liste obtenue en inversant l'ordre d'affichage des numéros des maisons à desservir. On note $\overline{\text{T}}$ la liste de distribution associée, et $\overline{\text{N}}$ le nombre de tours associé.

1. On considère la liste A = (4 3 1 5 2).
Donner T, N, $\overline{\text{A}}$, $\overline{\text{T}}$ et $\overline{\text{N}}$ pour cette liste A .
2. Montrer que, quelle que soit la liste d'affichage A, N+$\overline{\text{N}}$ est égal à 6.
3. Le joueur met entre 7 et 8 secondes pour effectuer un tour (7,5 secondes en moyenne), auxquelles il faut ajouter 1 seconde pour déposer chaque lettre.
Ainsi, pour la liste A = (4 3 1 5 2), il effectue 4 tours et met en moyenne 35 secondes.
Quelle est la durée moyenne d'une partie ?

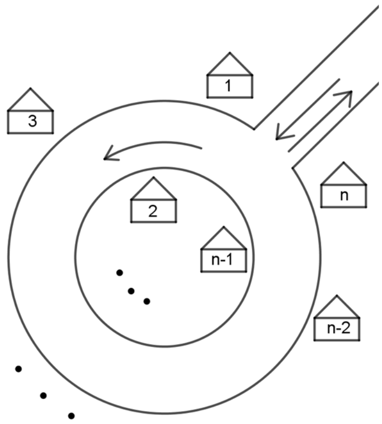
Troisième partie :

1. Justifier qu'il y a au total exactement 120 listes A différentes.
2. On admet qu'il y a exactement 26 listes A pour lesquelles N = 2.
   Déterminer le nombre de listes A pour lesquelles N = 3.
3. On suppose que chaque liste A a la même probabilité d'être affichée.
   Une partie est gagnée lorsque le joueur met moins de 30 secondes pour effectuer la tournée.
   Quelle est la probabilité que le joueur gagne une partie ?

Quatrième partie :

Le quartier est toujours desservi par un rond-point mais il y a maintenant *n* maisons, où *n* est un entier strictement positif.
Les maisons sont numérotées dans l'ordre croissant en tournant dans le sens indiqué sur le schéma.

On note :
- $u(n)$ le nombre de listes A pour lesquelles le facteur fera un tour (N = 1),
- $d(n)$ le nombre de listes A pour lesquelles le facteur fera deux tours (N = 2),
- $t(n)$ le nombre de listes A pour lesquelles le facteur fera trois tours (N = 3).



1. Justifier que $u(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Justifier que pour $n \geqslant 2$, $d(n) = (n-1)u(n-1) + 2d(n-1)$.
3. Écrire un programme (en python ou en langage naturel) qui détermine la valeur minimale n_0 pour laquelle $d(n_0) \geqslant 2021$.
4. Déterminer, pour $n \geqslant 3$, une expression de $t(n)$ en fonction de $t(n-1)$ et $d(n-1)$.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

NOM et PRENOM : ……………………………………

ETABLISSEMENT ET VILLE : ………

EXERCICE 1

Questions 3) et 4), grille à compléter.

2	5	5	1	3	4
3	4	2	4	2	5
4	1	3	2	5	3
1	4	3	5	3	3
5	4	4	3	1	2

Question 5), grille à compléter.

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1