

Introduction du théorème de Thalès

Auteurs : Laurianne FOULQUIER (IREM d'Aquitaine)

Vincent PAILLET ; Dominique POIRET-LOILIER (IREM d'Orléans)

Niveau : Cycle 4 [4^e-3^e]

Présentation

À partir d'agrandissements et de réductions de triangles, les élèves sont amenés à découvrir la configuration du théorème de Thalès dans le cas où les deux triangles sont l'un dans l'autre (configuration de 4^e).

Prérequis

- Notion d'agrandissement/réduction : travail sur la conservation des angles et la proportionnalité des longueurs (voir articles correspondants dans cette brochure). En particulier, il est utile d'avoir observé que, pour les triangles, la conservation des angles seule, ou la proportionnalité des longueurs des côtés, suffit.
- Somme des angles d'un triangle.
- Angles correspondants égaux et droites parallèles.

Objectifs principaux

Mise en place du théorème de Thalès en classe de 4^e avec le cheminement suivant :

- deux triangles dont les angles sont égaux sont en agrandissement/réduction l'un de l'autre.
- si on fait coïncider un angle de deux triangles en agrandissement/réduction, les autres étant correspondants et de même mesure, alors les triangles ont deux côtés parallèles et des sommets alignés.

Réciproquement,

si deux triangles ont un angle en commun (sommets alignés sur les deux côtés de l'angle) et deux côtés parallèles, leurs deux autres angles sont correspondants et de même mesure.

Les triangles sont donc en agrandissement/réduction l'un de l'autre et donc les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Matériel

- Les élèves doivent avoir leur matériel de géométrie, dont le rapporteur (ce dernier n'est cependant pas indispensable).
 - À télécharger : dossier « theoreme_de_Thales »
fiche-eleve_trianglesA et *fiche-eleve_trianglesB* (doc et pdf)
-

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario

Le professeur ne doit pas donner les trois étapes en même temps.

Toute l'activité se fait en binômes ou en groupes. Un bilan est fait à la suite de l'étape 2 et peut aboutir à la rédaction du cours sur le théorème de Thalès.

Phase de travail en binômes ou en groupes (30 à 40 minutes)

Étape 1 : découpage, association des triangles par paires, justification et description du positionnement.

Étape 2 : construction d'un triangle associé au triangle 5 resté seul, description de la construction et questionnement sur les mesures des longueurs des côtés.

Bilan et institutionnalisation (environ 30 à 45 minutes)

Phase de travail en binômes ou en groupes (10 à 15 minutes)

Description et analyse

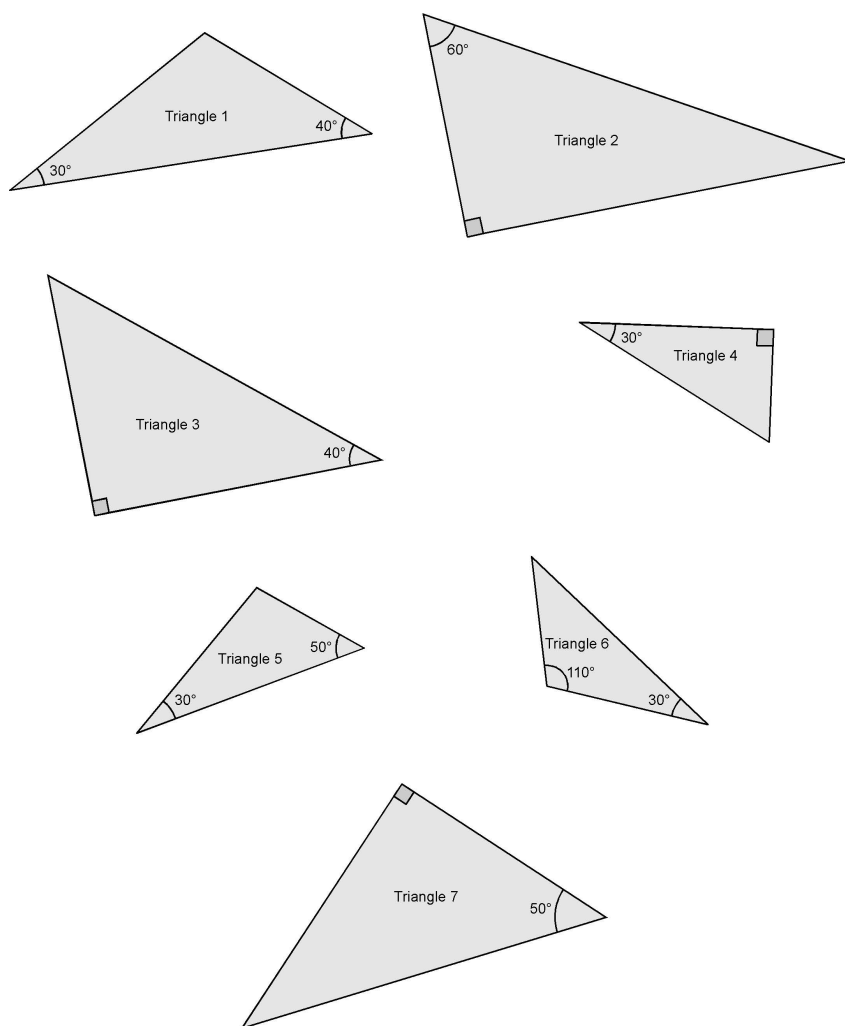
Étape 1

- 1) Parmi les 7 triangles ci-contre, il existe trois paires de triangles agrandis ou réduits l'un par rapport à l'autre. Découpez ces 7 triangles et retrouver les trois paires sans effectuer de mesure.

Justifiez votre choix le plus précisément possible ; des calculs pourront être effectués mais aucune mesure n'est permise.

Superposez vos triangles de manière à rendre vos associations visibles.

Appelez le professeur quand vous avez terminé.



Les élèves découpent les triangles et les associent deux par deux. Deux triangles associés doivent avoir leurs angles correspondants égaux. Nous avons décidé d'être explicites dans le questionnement, en ajoutant « superposez vos triangles... », sans quoi un nombre non négligeable d'élèves risque d'associer les triangles de manière à aboutir à des quadrilatères, ce qui n'est pas notre but.

2) Description des paires de triangles

Comment les sommets sont-ils positionnés les uns par rapport aux autres ?

Comment les côtés sont-ils positionnés ? Justifiez vos remarques dans la mesure du possible.

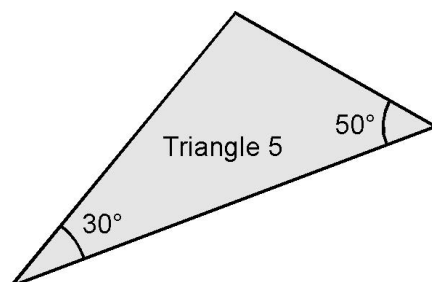
La description du positionnement demandé doit commencer à faire apparaître que des sommets sont alignés et que deux côtés sont parallèles (ce qui peut se justifier par le fait que des angles sont correspondants et égaux ; cette justification n'apparaît cependant que très rarement à l'écrit, un peu plus à l'oral). De ce point de vue, il pourrait être intéressant de proposer aussi trois triangles à associer. L'alignement des sommets et les côtés parallèles n'en seraient que plus évidents.

Un nombre non négligeable d'élèves se contente cependant de dire que les triangles associés ont des angles de même mesure et qu'ils ont mis un angle « l'un dans l'autre » ; le parallélisme n'apparaissant qu'à l'étape 2.

Dans cette étape, nous interdisons les mesures de longueurs de manière à ce que le raisonnement parte bien des angles égaux et non des côtés proportionnels. Ce point est important, sans quoi l'on risquerait de perdre toute rigueur. En effet, on partirait des côtés proportionnels pour aboutir à des droites parallèles, ce qui correspond à la réciproque et non au théorème de Thalès.

Étape 2

1. *Le triangle resté seul a été reproduit ci-dessous.
Sans mesurer de longueurs, construisez un triangle pouvant s'y associer. Pour cela, inspirez-vous du positionnement des paires de l'étape 1 que vous avez collés.
Expliquez votre construction.*
2. *Quelles remarques pouvez-vous faire quant aux longueurs du triangle de départ et celles de celui que vous avez construit ?
Vous pouvez simplement émettre des conjectures ou essayer de les démontrer.*



À la première question de cette étape, les élèves sont amenés à construire l'agrandissement ou la réduction du triangle de départ en prolongeant les côtés et en traçant une parallèle à un côté. Certains élèves, déjà à l'aise avec la notion d'agrandissement et réduction, construisent ce triangle à côté du premier. C'est pourquoi nous leur demandons de s'inspirer de l'étape 1. Ce point est à rappeler à certains élèves. L'agrandissement est souvent construit à l'aide de report d'un angle et deux côtés décrits comme étant parallèles.

Une autre idée serait de demander de construire, le plus rapidement possible, plusieurs triangles en agrandissement/réduction du triangle resté seul. Le fait de prolonger deux côtés et de tracer des parallèles au troisième serait alors une méthode très efficace mais la configuration de Thalès, avec simplement deux triangles, apparaîtrait peut-être moins clairement.

Quelle que soit la consigne, les angles correspondants sont alors égaux et l'on obtient bien deux triangles en agrandissement/réduction.

La seconde question doit faire apparaître que les longueurs des côtés sont proportionnelles. Ce raisonnement permet donc d'aboutir au théorème de Thalès et non à sa réciproque.

Le bilan est l'occasion de présenter les travaux de certains groupes. Celui-ci se fait à l'oral et la trace écrite sera faite dans le cours lors de l'institutionnalisation.

La propriété dégagée lors du bilan ne parle pas encore de coefficient d'agrandissement ou de réduction, de tableau de proportionnalité, ni de rapports égaux. Ces points seront vus lors de l'institutionnalisation. Ce sont des conséquences de la proportionnalité et non la conclusion du théorème de Thalès en tant que tel. L'activité s'arrête donc sur l'idée que : si deux triangles dans la configuration précédente ont deux côtés parallèles, alors leurs côtés sont de longueurs proportionnelles. On voit que pour aboutir à une rédaction précise, il est plus simple d'introduire des noms de points.

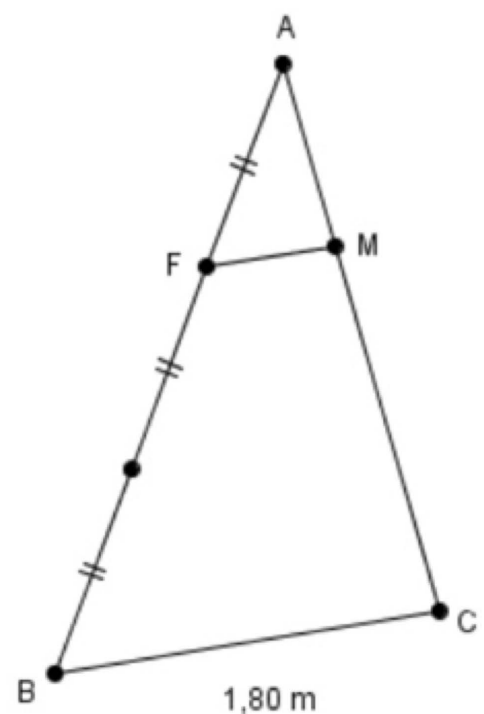
Étape 3

Sur la figure ci-contre :

- les points F et M appartiennent aux segments $[AB]$ et $[AC]$,
- les droites (FM) et (BC) sont parallèles.

Calculer la longueur FM si $BC = 1,80$ m.

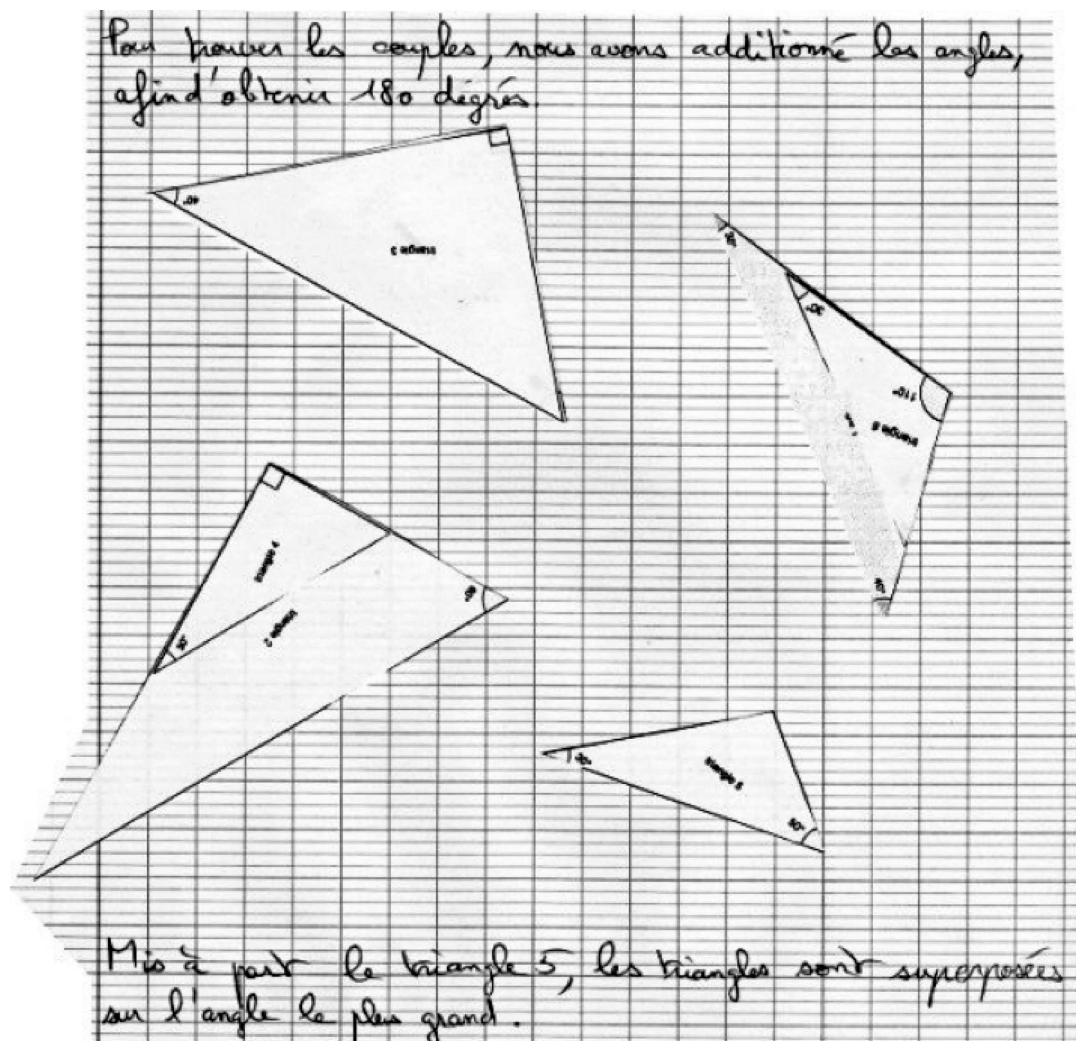
Cette dernière étape sert de bilan et permet aussi de gérer les rythmes entre les différents groupes. L'intérêt de mettre des codages est d'utiliser un coefficient de proportionnalité.



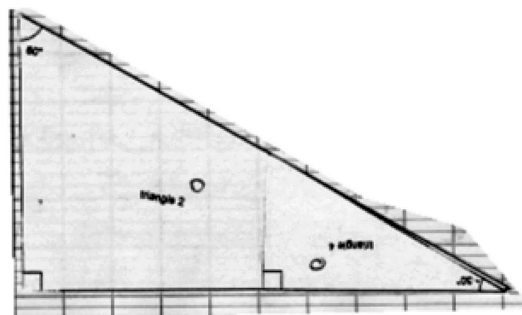
Productions d'élèves

Étape 1

Thomas et Baptiste : la majeure partie des élèves superposent sur l'angle le plus grand.



Cependant, ce n'est pas le cas de tous les groupes :



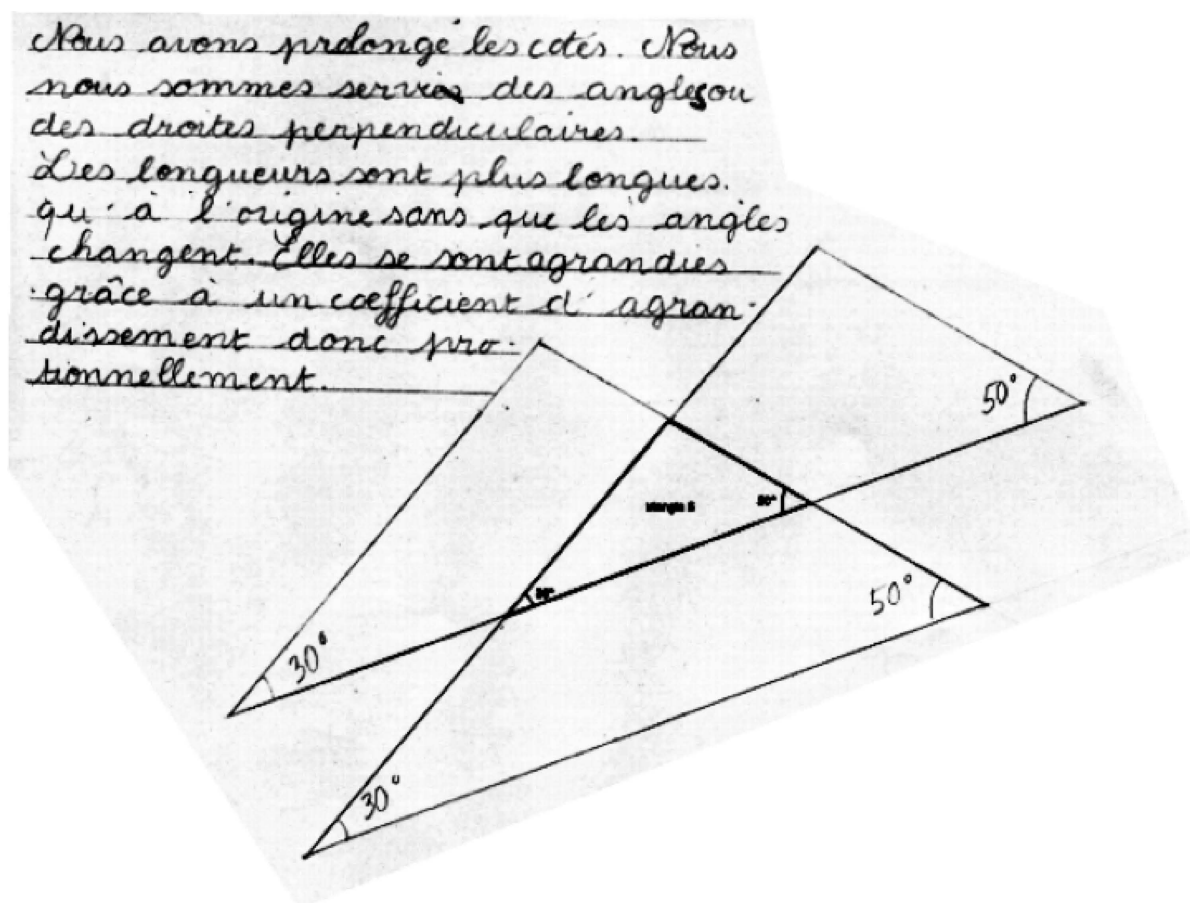
Aurélien et Lucas : mais il est plus rare qu'ils parlent explicitement de parallèles.

2) Les deux côtés adjacents à un angle se superposent à l'autre triangle paraissent plus petit ou plus grand. Les côtés qui ne se touchent pas sont parallèles.

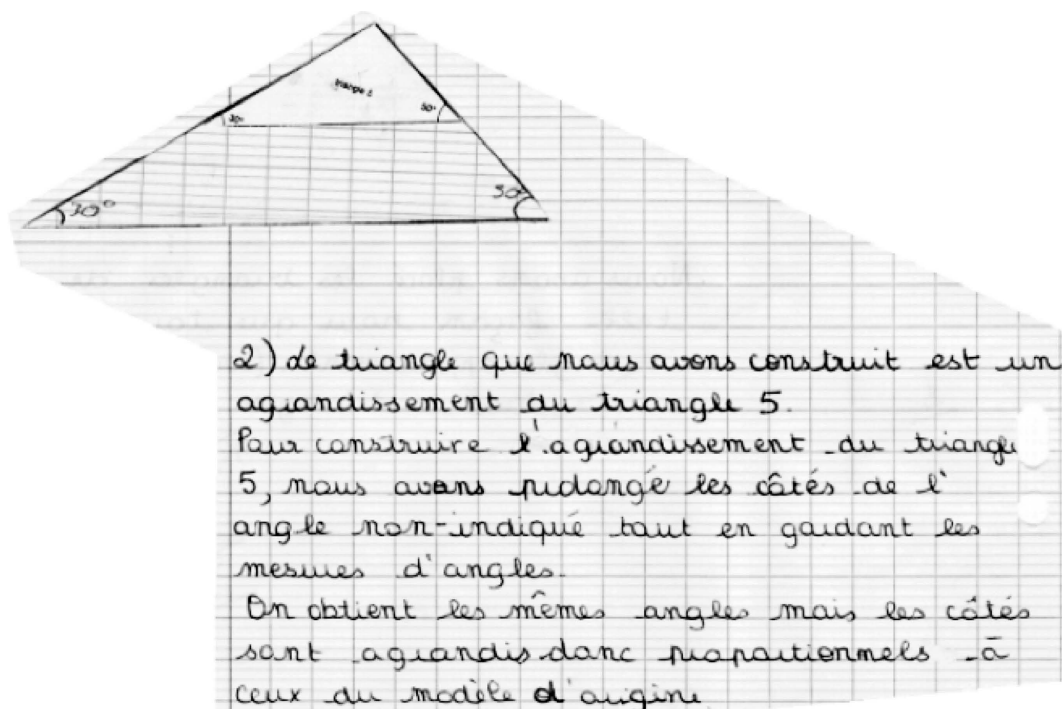
Étape 2

Les rédactions sont assez inégales mais tous arrivent à construire un agrandissement ou une réduction.

Juliette et Juliane : voici un exemple de constructions multiples accompagné d'un texte intéressant. Ces élèves ne parlent pas explicitement de parallèles mais expliquent leur construction.



Philippine et Maxime



Agrandissement et réduction dans les triangles

1) Propriétés (cette première partie a été écrite et travaillée avant l'activité)

Deux triangles en agrandissement ou réduction l'un de l'autre ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles et leurs angles égaux deux à deux.

Deux triangles qui ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles deux à deux sont en agrandissement ou réduction l'un de l'autre.

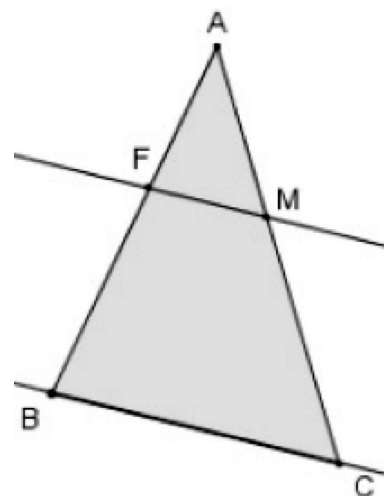
Deux triangles qui ont leurs angles égaux deux à deux sont en agrandissement ou réduction l'un de l'autre.

2) Le théorème de Thalès

Soit deux triangles ABC et AFM.

Si A, F, B et A, M, C sont alignés
et si (FM) et (BC) sont parallèles,

alors les longueurs des côtés de ABC et AFM sont proportionnelles deux à deux (ABC et AFM sont en agrandissement / réduction l'un de l'autre).



Cela signifie que :

- a. il existe un coefficient d'agrandissement ou de réduction k (coefficient de proportionnalité) et on peut écrire :

$$BC = FM \times k ; \quad AC = AM \times k ; \quad AB = AF \times k$$

- b. on a donc trois façons de calculer ce coefficient k

$$k = \frac{BC}{FM} \quad k = \frac{AC}{AM} \quad k = \frac{AB}{AF}$$

$$\text{On a donc les égalités : } \frac{BC}{FM} = \frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AF}$$

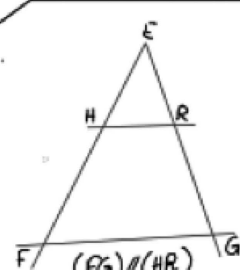
- c. on peut aussi tracer et utiliser un tableau de proportionnalité :

Longueurs de ABC	BC	AC	AB
Longueurs de AFM	FM	AM	AF

Un exemple peut être ensuite donné, détaillant l'utilisation de chacune des trois techniques de calcul ci-dessus.

Exemple d'utilisation :

EH = 6 cm
 HF = 3 cm
 ER = 7 cm
 FG = 12 cm
 Calculer HR et EG



Les points E, H, F et E, R, G sont alignés
 Les droites (HR) et (FG) sont parallèles
 donc, d'après le théorème de Thalès, les triangles ERH et EGF ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles.

Pour calculer HR et EG, on a donc 3 techniques :

Technique 1 : tableau de proportionnalité :

:1,5	côtés de ERH	EH = 6 cm	ER = 7 cm	HR	x1,5
	côtés de EGF (correspondants)	EF = 9 cm (6 cm + 3 cm)	EG	FG = 12 cm	

On cherche le coefficient de proportionnalité :
 $6 \text{ cm} \times ? = 9 \text{ cm}$ donc $? = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$.

donc $EG = ER \times 1,5 = 7 \text{ cm} \times 1,5 = 10,5 \text{ cm}$.

$HR = FG : 1,5 = 12 \text{ cm} : 1,5 = 8 \text{ cm}$.

Technique 2 : coefficient d'agrandissement ou de réduction :

On remarque que : $6 \text{ cm} \times 1,5 = 9 \text{ cm}$ ($\frac{9}{6} = 1,5$)

On retrouve le coefficient de proportionnalité de la technique 1 et on refait les mêmes calculs.

Technique 3 : Égalités de quotients (de fractions ; de rapports)

On a : $\frac{EH}{EF} = \frac{ER}{EG} = \frac{HR}{FG}$
côtés de EHR
côtés de EFG correspondants.

On remplace : $\frac{6}{9} = \frac{7}{EG} = \frac{HR}{12}$

EG ?

$$\frac{6}{9} = \frac{7}{EG}$$

$$6 \times \frac{7}{6} = 7$$

donc $EG = 9 \times \frac{7}{6} = \frac{9 \times 7}{6} = 10,5$

HR ?

$$\frac{6}{9} = \frac{HR}{12}$$

$$9 \times \frac{12}{9} = 12$$

donc $HR = 6 \times \frac{12}{9} = \frac{6 \times 12}{9} = 8$

Étape 1

1) Parmi les 7 triangles ci-dessous, il existe trois paires de triangles agrandis ou réduits l'un par rapport à l'autre.

Découpez ces 7 triangles et retrouvez les trois paires sans **effectuer de mesure**.

Justifiez votre choix le plus précisément possible ; des calculs pourront être effectués mais aucune mesure n'est permise.

Superposez vos triangles de manière à rendre vos associations visibles.

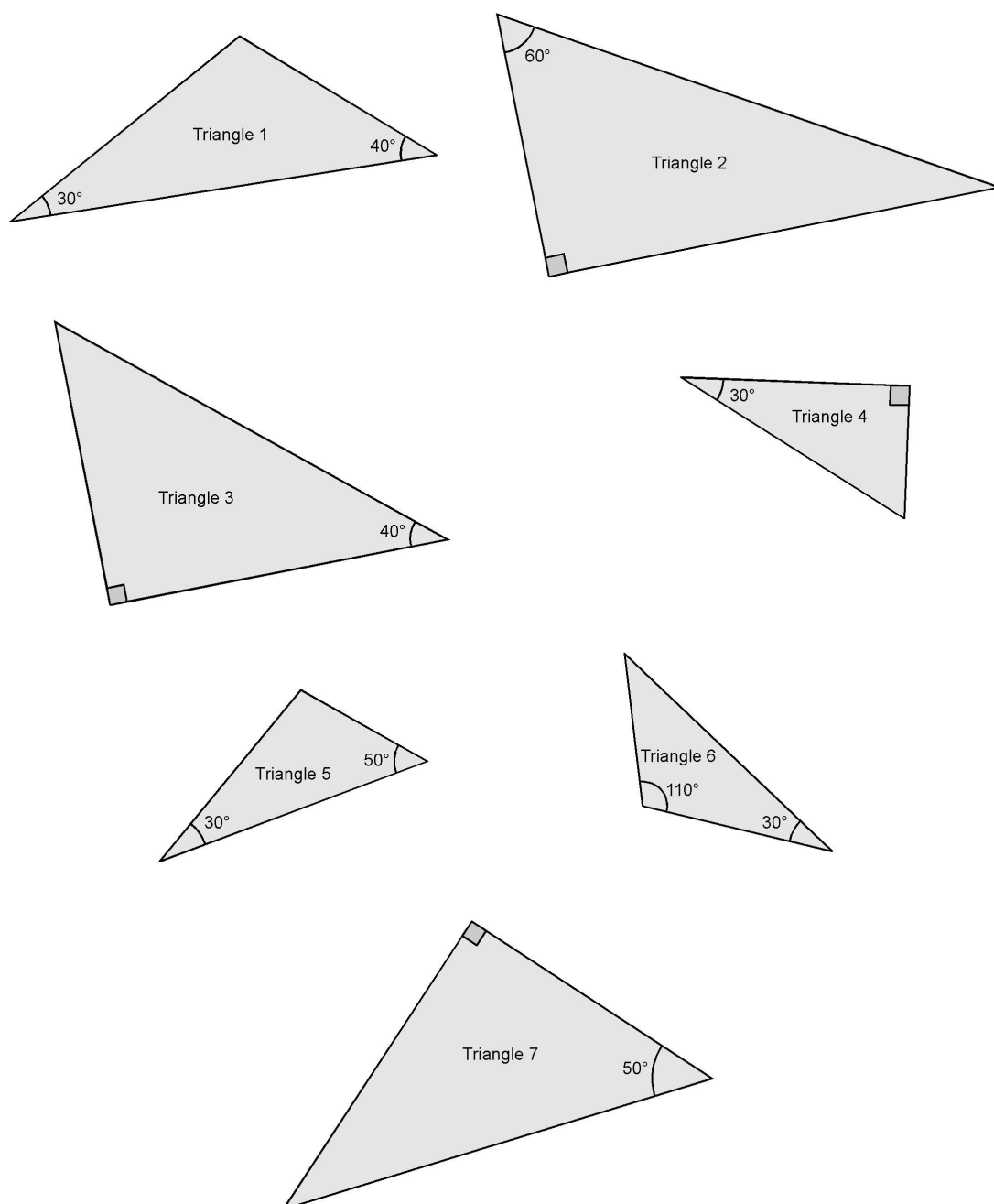
Appelez le professeur quand vous avez terminé.

2) **Ne collez vos triangles que lorsque le professeur a validé votre choix !**

Description des couples de triangles

Comment les sommets sont-ils positionnés les uns par rapport aux autres ?

Comment les côtés sont-ils positionnés ? (dans la mesure du possible, justifiez vos remarques)



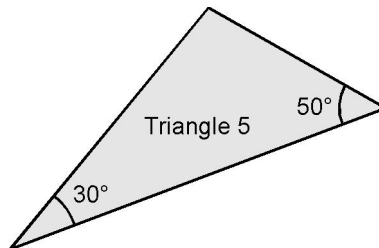
Étape 2

1) Le triangle resté seul a été reproduit ci-dessous.

Sans mesurer de longueurs, construisez un triangle pouvant s'y associer. Pour cela inspirez-vous du positionnement des paires de triangles de l'étape 1 que vous avez collés. Expliquez votre construction.

2) Quelles remarques pouvez-vous faire quant aux longueurs du triangle de départ et celles de celui que vous avez construit ?

Vous pouvez simplement émettre des conjectures ou essayer de les démontrer.



Étape 3

Sur la figure ci-contre :

- les points F et M appartiennent aux segments [AB] et [AC],
- les droites (FM) et (BC) sont parallèles.

Calculer la longueur FM si $BC = 1,80$ m.

