MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Deuxième partie

Académie de Toulouse

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

- Seules les annexes éventuelles doivent être insérées dans les copies.
- Ne pas insérer les énoncés qui doivent être rendus séparément.

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 2 et 3.

Tous les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Sauf mention contraire, les réponses devront être justifiées.

Exercice 1

Pour les candidats de la voie générale ne suivant pas l'EDS Mathématiques et TOUS les candidats de la voie technologique

Combien de menteurs ?

Un certain nombre de personnes sont assises autour d'une table ronde. Certaines sont des menteurs et mentent tout le temps, les autres sont des véridiques et ne mentent jamais.

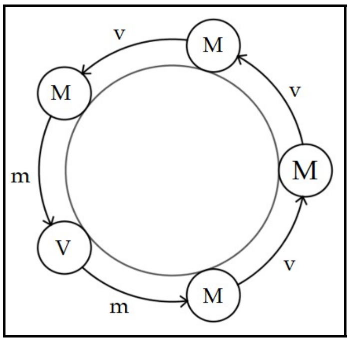
Toutes savent ce que sont les uns et les autres.

Partie A

Le schéma ci-contre représente la situation dans laquelle

- Il y a 4 menteurs (M) et 1 véridique (V) (dans les petits cercles).
- A côté de chaque flèche, il est indiqué ce que chacune dit de son voisin de droite.

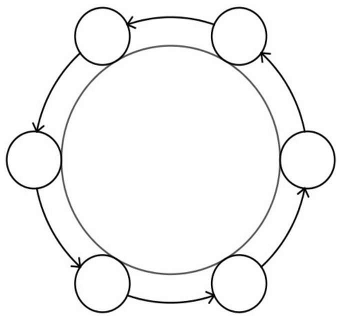
3 personnes disent : « mon voisin de droite est un véridique » (v) , les 2 autres disent : « mon voisin de droite est un menteur» (m).



1. Compléter selon le même principe le schéma n°1 de l'annexe. (sans justification)

2. Compléter de toutes les façons possibles le schéma n°2 de l'annexe dans les situations où exactement une seule personne affirme "mon voisin de droite est un véridique". (sans justification)

3. Dans cette question, il y a 6 personnes autour de la table.



a) Toutes affirment : «**Mon voisin de droite est un véridique** ». Que peut-on en conclure ?

b) De même, que peut-on conclure si toutes disent «**Mon voisin de droite est un menteur** » ?

c) Est-il possible qu'une seule affirme « **Mon voisin de droite est un véridique** » ?

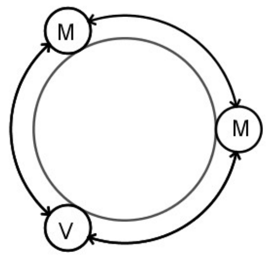
4. Dans cette question, il y a n personnes ($n \geqslant 3$) autour de la table.

Pour quelles valeurs de n est-il possible qu'une seule affirme « **Mon voisin de droite est un véridique** » ?

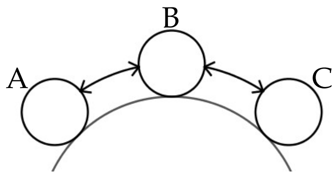
Partie B

Dans cette partie B toutes les personnes affirment : **« Mes voisins sont tous les 2 des menteurs »**

Dans toute la suite, on n'indiquera plus à côté des flèches ce que chacun dit de ses voisins.



1. Expliquer pourquoi dans la situation ci-contre, tout le monde affirme bien que ses 2 voisins sont des menteurs :

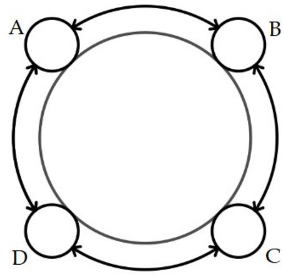


2. Dans cette question, il y a n personnes $(n \geqslant 3)$ autour de la table. Parmi elles, on considère 3 voisins A, B et C assis comme le montre la figure ci-contre.

a) Si B est un menteur, pourquoi peut-on affirmer que A et C ne peuvent pas être tous les 2 des menteurs ?

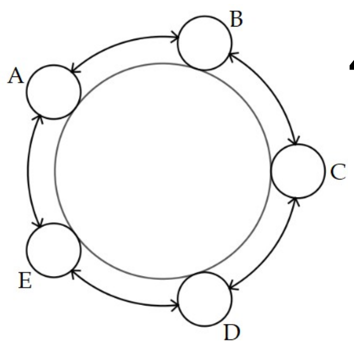
b) Expliquez pourquoi parmi A, B et C, il y a au moins 1 véridique.

c) Dans le cas où ils ne sont que tous les 3 à table, pourquoi y a-t-il exactement 2 menteurs ?



3. Dans cette question, il y a 4 personnes à table. On sait de plus que A est un menteur.

Que peut-on dire de B, C et D ?



4. Dans cette question, il y a 5 personnes à table.

a) Cas n°1 : A et B sont des menteurs.

Que peut-on dire des autres ?

b) Cas n°2 : A est un menteur et B est un véridique.

Que peut-on dire des autres ?

Partie C

Dans cette partie C, toutes les personnes affirment **« Au moins un de mes 2 voisins est un menteur».**

Pour chacun des cas proposés en annexe (schéma n°3), compléter une configuration possible. Aucune justification n'est demandée.

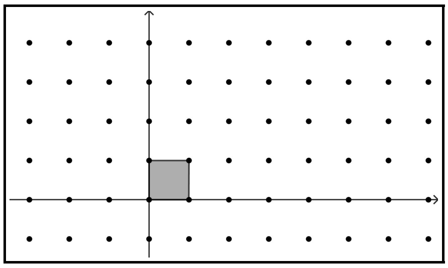
Exercice 2

A traiter uniquement par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale

La formule de Pick

Dans cet exercice, nous allons nous intéresser à la formule de Pick, une formule simple qui permet de calculer des aires sans utiliser les longueurs.

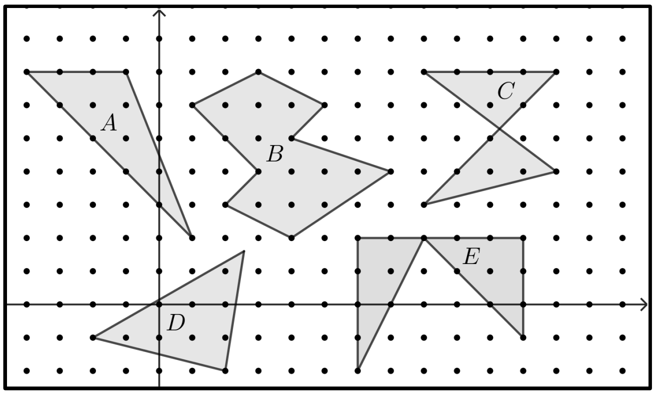
On considère un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
L'ensemble des points dont les deux coordonnées sont des nombres entiers forme ce qu'on appellera une grille régulière.
L'aire du carré grisé est l'unité d'aire.



On appelle **polygone simple** un polygone qui vérifie les trois conditions suivantes :

- C1. Non croisé.
- C2. Dont les sommets sont des points de la grille régulière.
- C3. Dont tous les sommets appartiennent à deux segments exactement.

Exemples : *A* et *B* ci-dessous sont des polygones simples.



Partie A

1. Justifier que *C*, *D* et *E* ne sont pas des polygones simples.

On considère *P* un polygone. On note :

- *i* : le nombre de points de la grille situés strictement à l'intérieur de *P.*
- *c* : le nombre de points de la grille appartenant aux côtés du polygone *P* (y compris les sommets).

On dit que *P* **est de Pick** si son aire est égale à $\boxed{i+\frac{c}{2}-1}$

2. Dans la figure de la page précédente,

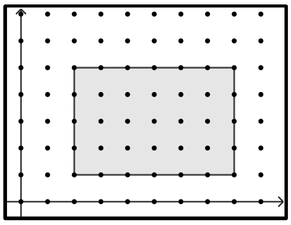
a) L'aire de A est égale à 7,5 et celle de B est égale à 13,5. Sont-ils de Pick ?

b) E est-il de Pick ?

c) L'aire de D est environ égale à 5,61 au centième près. Justifier que D ne peut pas être de Pick.

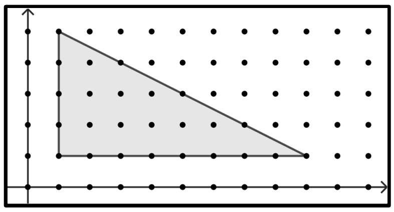
Dans la suite du sujet, on s'intéresse exclusivement à des polygones simples.

Partie B : Quelques cas particuliers



1. a) Démontrer qu'un rectangle simple de longueur 6 et de largeur 4 dont les côtés sont parallèles aux axes du repère est de Pick.

b) Démontrer qu'un rectangle simple de longueur L et de largeur ℓ dont les côtés sont parallèles aux axes du repère est de Pick.



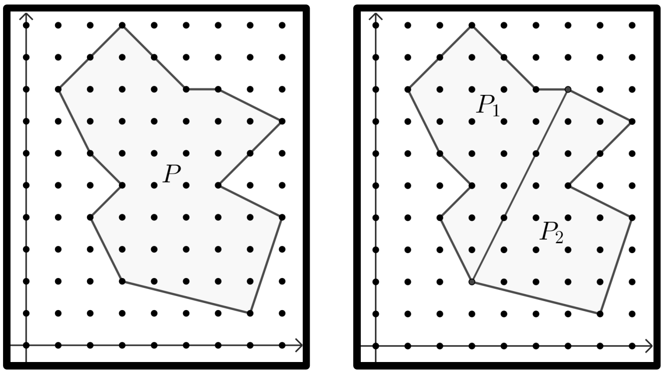
2. En déduire que tous les triangles rectangles simples ayant deux côtés parallèles aux axes du repère sont de Pick.

On pourra noter ***h*** le nombre de points de la grille qui appartiennent à l'hypoténuse.

Partie C : Cas général

Soit P un polygone simple ayant au moins 4 sommets.
On considère un segment reliant deux sommets de P en restant strictement à l'intérieur de P. Il découpe P en deux polygones simples P_1 et P_2.

Par exemple :



On introduit les variables suivantes :

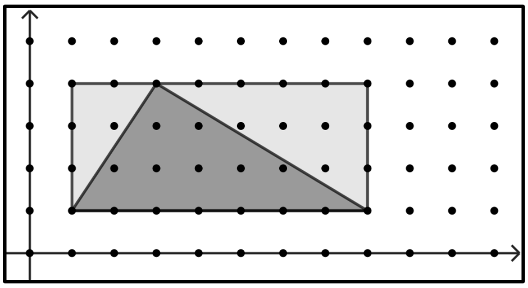
- A, A_1 et A_2 les aires respectives de P, P_1 et P_2.
- i , i_1 et i_2 le nombre de points de la grille situés respectivement strictement à l'intérieur des polygones P, P_1 et P_2.
- c , c_1 et c_2 le nombre de points de la grille appartenant respectivement aux côtés des polygones P, P_1 et P_2.
- h le nombre de points de la grille appartenant au segment séparant les deux polygones.

1. a) Exprimer A, i et c en fonction des variables introduites ci-dessus.

b) En déduire que si P_1 et P_2 sont de Pick alors P est de Pick.

c) Montrer aussi que si P et P_1 sont de Pick, alors P_2 est de Pick.

2. On considère un triangle T simple ayant un de ses côtés parallèle à l'axe des abscisses. Ci-contre, un exemple.



En l'inscrivant dans un rectangle simple, démontrer que T est de Pick.

3. Démontrer qu'un triangle simple quelconque est de Pick.

4. En déduire que tous les polygones simples sont de Pick.

Exercice 3 **(à traiter par tous les candidats)**

Persistance multiplicative

Dans tout ce problème, on considérera des entiers naturels.

- On choisit un nombre entier naturel supérieur ou égal à 10.
- On calcule le produit des chiffres de son écriture décimale.
- Si le résultat est supérieur ou égal à 10 on recommence avec le nombre obtenu. Et l'on fait cela tant que les résultats sont supérieurs ou égaux à 10.
- Si on obtient un résultat inférieur ou égal à 9, on s'arrête et on dit que le nombre choisi admet une persistance multiplicative. Le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir un résultat inférieur ou égal à 9 sera appelé « longueur de la persistance multiplicative ».

Par exemple, si on choisit 326 :

- $3\times2\times6=36$ Étape n°1
- $3\times6=18$ Étape n°2
- $1\times8=8$ Étape n°3

Ainsi, 326 possède une persistance multiplicative, de longueur égale à 3

Partie A : Quelques exemples

1. Vérifier que $14\,732$ admet une persistance multiplicative de longueur 4.

2. Soit un entier n s'écrivant avec trois chiffres : $n=28\square$.

Recopier et compléter la case par un chiffre afin que n admette une persistance multiplicative de longueur égale à 1.

3. Soit un entier m s'écrivant avec quatre chiffres $m=79\square\square$.

Recopier et compléter chaque case par un chiffre afin que m admette une persistance multiplicative de longueur égale à 2.

4. a) Montrer que 154 admet une persistance multiplicative, de longueur à préciser.

b) Déterminer deux autres entiers naturels s'écrivant chacun avec trois chiffres et de persistance multiplicative de longueur égale à 2.

c) Comment déterminer un nombre entier naturel aussi grand que l'on veut de persistance multiplicative de longueur égale à 2 ?

On rappelle que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers, à l'ordre des facteurs près.
Par exemple : $2646 = 2\times 3^2 \times 7^2$.

5. a) Montrer que 2646 admet une persistance multiplicative, de longueur à préciser.

b) En déduire un entier naturel, de persistance multiplicative de longueur égale à 5 .

On note désormais p , la fonction qui à tout entier naturel supérieur ou égal à 10 associe le produit de ses chiffres. Par exemple, $p(326)=36$.

Partie B : Recherche d'antécédents

1. Déterminer un antécédent de 1000 par la fonction p .

2. 154 admet-il un antécédent par la fonction p ?

3. De façon générale, que peut-on vérifier pour affirmer qu'un nombre n'a pas d'antécédent par la fonction p ?

On rappelle que tout entier naturel n peut s'écrire sous la forme :
$n=a_m\times 10^m+a_{m-1}\times 10^{m-1}+\cdots+a_1\times 10^1+a_0\times 10^0$
a_m , a_{m-1} , ..., a_1 , a_0 étant les $m+1$ chiffres de son écriture décimale avec $a_m\neq 0$.
Exemple : $1209=1\times 10^3+2\times 10^2+0\times 10^1+9\times 10^0$
($m=3$, $a_3=1\neq 0$, $a_2=2$, $a_1=0$, $a_0=9$).

Dans les parties **C** et **D**, n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 10, s'écrivant sous la forme ci-dessus.

Partie C : Comparaison des produits successifs

1. Démontrer que $p(n)\leqslant a_m\times 9^m$.

2. En déduire que $p(n)<n$.

3. Pourquoi peut on affirmer que tout entier naturel supérieur ou égal à 10 admet une persistance multiplicative.

Partie D : Majoration de la longueur de la persistance multiplicative

1. a) Démontrer que $a_m\times 9^m\leqslant\left(\frac{9}{10}\right)^m$.

b) En déduire que $p(n)\leqslant n\left(\frac{9}{10}\right)^m$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel q à partir duquel $\left(\frac{9}{10}\right)^q<\frac{1}{10}$.

Un programme informatique permet de vérifier que tout entier naturel s'écrivant avec au plus 22 chiffres admet une persistance multiplicative de longueur inférieure ou égale au nombre de chiffres de son écriture décimale plus 2 (**On admet ce résultat**).

3. En déduire que c'est aussi le cas pour tout entier naturel s'écrivant avec au moins 23 chiffres.

4. Déterminer un majorant de la longueur de la persistance multiplicative d'un nombre à k chiffres, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Information : $277\,777\,788\,888\,899$ a une persistance multiplicative de longueur égale à 11. C'est le plus petit des entiers naturels de persistance multiplicative de longueur 11.

Il a été conjecturé en 1973 que tout nombre entier naturel a une persistance multiplicative de longueur inférieure ou égale à 11. Mais à ce jour, personne n'aurait réussi à le démontrer !

Remarque : De façon abusive, on a multiplié les chiffres comme si ces chiffres étaient des nombres.

Annexe à détacher et à rendre avec la copie :

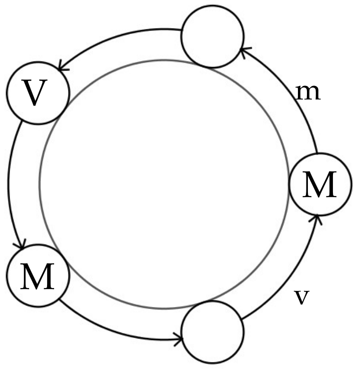
Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale.

Nom Prénom :

Partie A : Question 1

Schéma n° 1 :

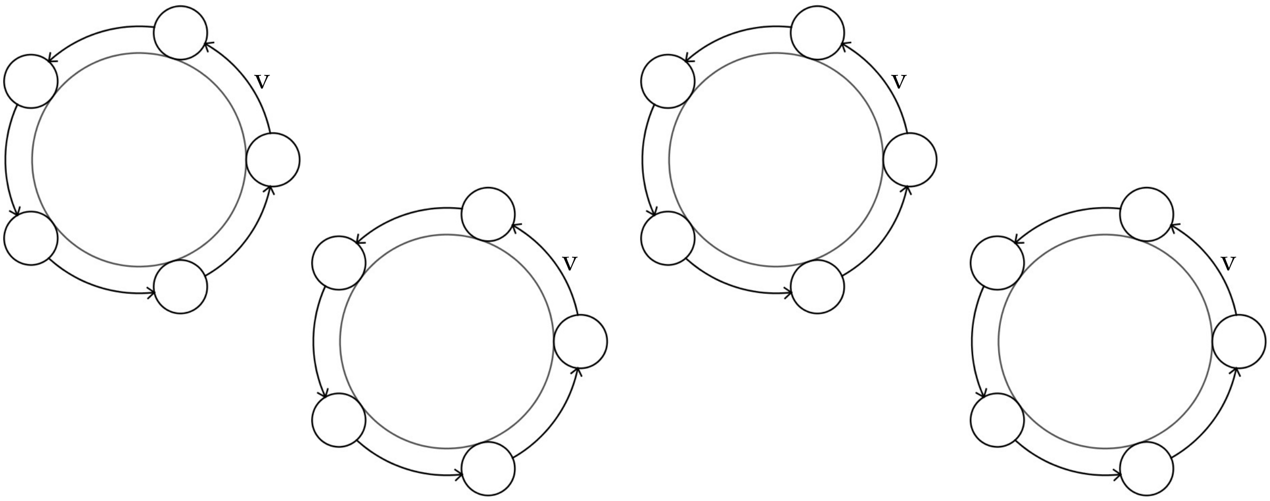
Aucune justification n'est demandée.



Partie A : Question 2

Schéma n° 2 :

Il faut donner toutes les solutions possibles, on pourra utiliser les schémas ci-dessous, ils ne sont peut-être pas tous utiles. Aucune justification n'est demandée.



Partie C

Schémas n°3

Aucune justification n'est demandée.