MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2026

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique – Orient

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les énoncés et les copies sont également ramassées.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices nationaux (2 heures).

- **Les candidats et candidates de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths ») traitent les exercices nationaux 1 et 2.

- **Tous les autres candidats et candidates**, c'est-à-dire de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et tous et toutes de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD,...) traitent les exercices nationaux 1 et 3.

Chaque candidat ou candidate traite ainsi deux exercices nationaux. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats et candidates qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'elles ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième exercice (exercice 2 ou 3 selon votre catégorie) quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le ou la candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'elle a été amenée à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre, petit matériel (ciseaux, colle) et calculatrices sont admis selon la réglementation en vigueur. L'échange de ces instruments, hors calculatrice, peut être autorisé entre candidats sur accord explicite des surveillants, et dans le strict respect du silence.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé national comporte 6 pages.

Exercice 1 (tous les candidats et candidates)

Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. *Les feux de l'amour.* Si Alice n'aime pas Jordan alors Brenda n'aime pas Dan. Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan. Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan. Brenda aime-t-elle Dan ?

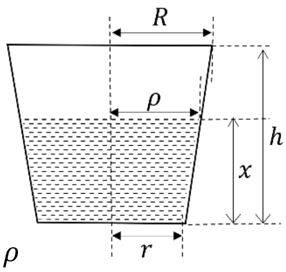
2. *Retour vers le futur.* Votre oncle a 54 ans. En échangeant les chiffres des unités et des dizaines, il n'a plus que 45 ans. Cet artifice lui fait gagner 9 ans. Plus généralement, envisageons une personne ayant ab années, avec éventuellement $a = 0$ (dans l'exemple ci-dessus, $a = 5$ et $b = 4$).

a. Combien d'années, au maximum, cette facétieuse personne pourrait-elle gagner grâce à ce procédé ?

b. Cette personne pourrait-elle ainsi gagner exactement 30 ans ?

3. *Intelligence Administrative.* 4 personnes se présentent à l'élection d'un conseil. Tous les votes sont valides et exprimés. Voici les résultats obtenus : Johanna obtient $\frac{1}{4}$ des voix, Jason obtient $\frac{4}{15}$ des voix, Jasmine obtient $\frac{3}{20}$ des voix, et Julie obtient $\frac{1}{3}$ des voix. Qui l'emporte et combien pouvait-il y avoir de votants ?

4. *Une moitié de seau pas si bête.* Un seau a la forme d'un tronc de cône de petit rayon r, de grand rayon $R > r$ et de hauteur totale h.



a. Justifier que son volume total vaut

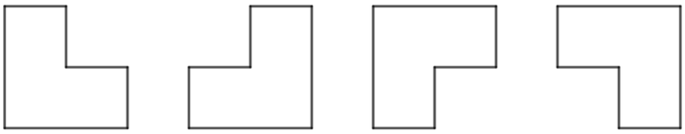
$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2)\ .$$

b. On remplit le seau jusqu'à la hauteur x, nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, h]$. La surface de l'eau à cette hauteur x est un disque de rayon ρ. Déterminer ρ en fonction de r, R et h.

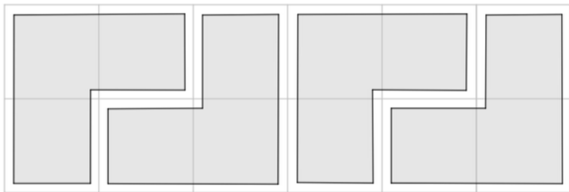
c. On suppose que $r = 1$, $R = 1{,}2$ et $h = 2$. À l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de x de sorte que le seau soit rempli à la moitié de sa capacité.

Pourquoi pouvait-on limiter la recherche autour et au-dessus de la valeur $x = 1$?

5. *Triominos.* Les polygones suivants, formés de trois carrés, sont appelés *triominos* :



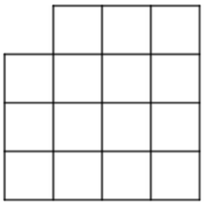
On s'intéresse au pavage par des triominos de grilles (ou, en ***b.*** *et* ***c.*** de morceaux de grilles) de format $a \times b$, où a désigne leur nombre de lignes et b leur nombre de colonnes. La figure ci-contre montre un exemple de pavage d'une grille dans le cas où $a = 2$ et $b = 6$.



Soit n un entier naturel non nul.

a. Est-il possible de paver une grille de format $2^n \times 2^n$?

b. On retire le carré en haut à gauche d'une telle grille (exemple ci-contre avec $n = 2$). Démontrer qu'il est alors possible de paver cette grille ainsi modifiée (on commencera par les cas $n = 1$ et $n = 2$ avant de généraliser).



c. Démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on enlève n'importe laquelle des cases de la grille complète $2^n \times 2^n$ initiale.

6. *Sommes harmoniques.* Pour n entier naturel, $n \geq 1$, on calcule la somme (dite « harmonique »)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

a. Justifier que $H_4 = \frac{25}{12}$.

b. Proposer un code en langage Python permettant d'obtenir H_n pour tout entier naturel n avec $n \geq 1$.

c. On appelle « terme binaire » de H_n l'inverse de la plus grande puissance de deux figurant parmi ses termes à sommer. Ainsi, le terme binaire de H_2 est $\frac{1}{2}$, celui de H_3 aussi ; le terme binaire de H_8 est $\frac{1}{8}$, celui de H_9, de H_{10}..., H_{15} aussi, etc. Quel est le terme binaire de H_3 ? De H_5 ? De H_{20} ?

d. On remarque, après quelques essais, que les valeurs de H_n ne semblent jamais être entières dès que $n \geq 2$. Démontrer-le à l'aide, notamment, du terme binaire de H_n.

Exercice 2 (candidats et candidates de la voie générale suivant la « spé maths »)

Super premiers

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel non nul qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Ainsi, on rappelle que ni 0 ni 1 ne sont premiers.

On rappelle aussi qu'il existe une infinité de nombres premiers, que l'on peut ensuite ordonner : le plus petit des nombres premiers est 2, on le note p_1 ; le suivant est 3, on le note p_2 et ainsi de suite. On notera ainsi p_n le n-ième nombre premier. On donne, à titre d'illustration, la liste ordonnée (de p_1 à p_{15}) des quinze premiers nombres premiers :

$p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5; p_4 = 7; p_5 = 11; p_6 = 13; p_7 = 17; p_8 = 19; p_9 = 23; p_{10} = 29,$

$p_{11} = 31; p_{12} = 37; p_{13} = 41; p_{14} = 43; p_{15} = 47.$

Pour tout entier naturel n, on note $\pi(n)$ ou plus simplement π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On signale que cette notation, $\pi(n)$ ou π_n , est usuelle dans ce contexte, mais n'a rien à voir avec le nombre π de la géométrie du cercle.

Étude de la suite $(\pi_n)_{n\geq 0}$

1. Justifier que $\pi_0 = 0$ et $\pi_5 = 3$. Combien valent π_1, π_2, π_6, π_{29}, π_{47} et π_{46}?

2. Démontrer que la suite $(\pi_n)_{n\geq 0}$ est croissante, c'est-à-dire que, pour tout naturel n, $\pi_n \leq \pi_{n+1}$.

3. Démontrer que si p et q sont deux nombres premiers tels que $p < q$, alors $\pi_p < \pi_q$.

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\pi_n \leq n$. Pour quel(s) entier(s) n a-t-on $\pi_n = n$?

Suite des itérés de m par π

Pour m entier naturel, on appelle suite des itérés de m par π la suite de nombres formée par m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; etc. Ainsi, la suite des itérés de m par π est-elle $(m; \pi(m); \pi(\pi(m));\ \pi\left(\pi(\pi(m))\right), \ldots)$

5. Calculer les 7 premiers termes de la suite des itérés de m dans les cas particuliers où $m = 5$ puis où $m = 11$.

6. Démontrer que, de manière générale, la suite des itérées d'un entier naturel m est toujours décroissante, et devient nulle à partir d'un certain rang.

Entiers super premiers

Un entier naturel m tel que $m \geq 2$ est dit *super premier* si, dans la suite des itérés de m par π, tous les termes différents de 0 et de 1 sont des nombres premiers. En particulier, un super premier est premier.

7. Parmi les nombres 2, 3, 5, 7 et 11, lesquels sont super premiers ?

8. Soit n un entier naturel non nul. Supposons avoir construit les n plus petits entiers super premiers $s_1 < \cdots < s_n$. Montrer que le super premier suivant est le nombre premier p tel que $\pi(p) = s_n$.

9. Donner le cinquième plus petit nombre super premier.

Comportement asymptotique de la suite des super premiers.

Bien sûr, la suite ordonnée (s_n) des nombres super premiers tend vers $+\infty$, mais on souhaite montrer qu'elle tend très vite vers l'infini, au sens où le quotient $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ tend lui-même vers $+\infty$. Plus explicitement, nous fixons un entier naturel non nul M, et nous allons montrer qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq M.$$

Pour ce faire, nous admettons le résultat suivant, qu'il est donc inutile de démontrer :

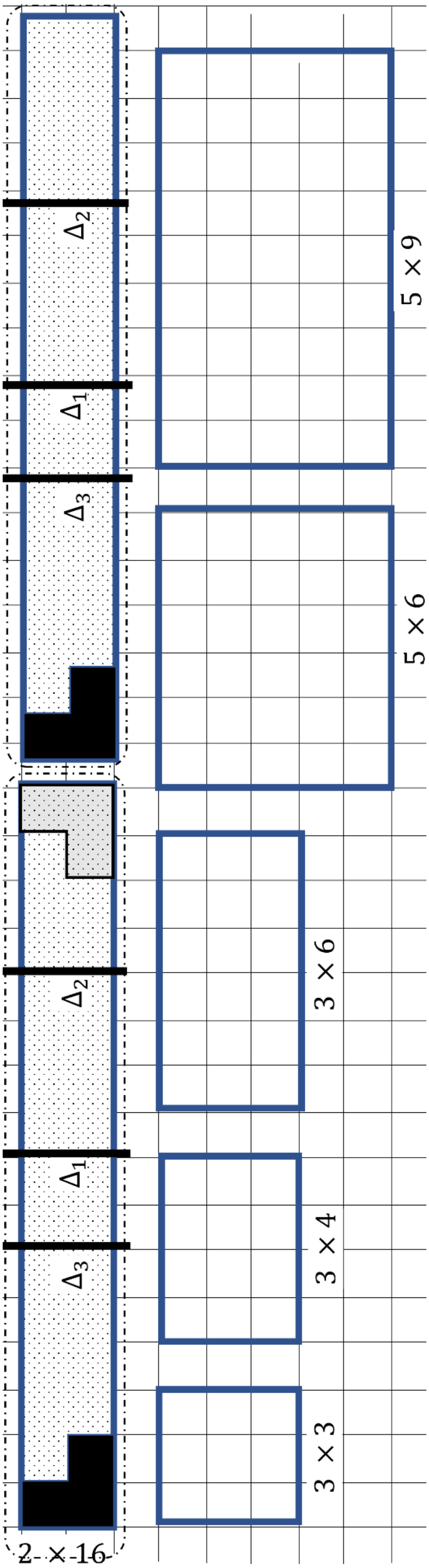
Pour tout entier naturel non nul N, on a $Q_N \leq 4^N$, où Q_N est le produit des nombres premiers compris (au sens large) entre 1 et N.

10. Montrer que pour tout entier $N \geq 4^{2(M+1)}$, on a : $4^{(M+1)\left(\pi(N)-\pi(\sqrt{N})\right)} \leq 4^N$. On pourra considérer le produit des nombres premiers compris entre $\sqrt{N}$ (non compris) et N.

11. En déduire, dès lors, que : $\pi(N) \leq \frac{N}{M+1} + \sqrt{N}$.

12. Montrer enfin que pour N suffisamment grand, $\frac{N}{\pi(N)} \geq M$.

13. Conclure.



Exercice 3 (candidat/es de la voie générale NE suivant PAS la « spé maths » et TOUS/TES les candidat/es de la voie technologique)

Triominos (bis)

On revient ici sur les pavages par des triominos (cf. **5.** de l'exercice 1) de grilles (ici, complètes) $a \times b$ rectangulaires, puis carrées, sur lesquels on se pose des questions complémentaires.

Il est recommandé de dessiner sur sa copie les grilles au stylo, mais les triominos au crayon de papier. On pourra s'aider, comme brouillon, des grilles déjà tracées figurant en regard.

1. Représenter un pavage d'une grille dans le cas où $a = 3$ et $b = 4$.

2. ***a.*** On suppose que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ (on la dit alors « pavable »). Montrer que l'entier ab est divisible par 3.

b. Trouver la plus petite grille carrée pavable de taille $a \times a$.

c. La condition « ab est divisible par 3 » est-elle suffisante pour garantir qu'une grille de taille $a \times b$ soit pavable ?

3. On suppose que $a = 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur b une grille de taille $2 \times b$ est-elle pavable ?

4. *Travaux manuels.* Sur l'un des bandeaux 2×16 ci-contre, on a symétrisé le triomino encré en noir par rapport à l'axe Δ_1, cela a donné le triomino teinté en clair à l'autre bout. On symétrise ce nouveau triomino par rapport à l'axe Δ_2, puis le nouveau-nouveau triomino par rapport à Δ_3.

a. Dessiner sur votre copie à l'échelle 1/2 le bandeau et les 4 triominos (dont celui d'origine) en présence.

b. Découper un bandeau (à l'échelle 1) de l'énoncé, remplacer chaque symétrie par un pliage en faisant en sorte que le triomino noir soit toujours visible. Enfin découper selon ses traits. On obtient une farandole de 8 triominos identiques. Pourquoi ? *Le deuxième bandeau en fournit aussi 8.*

5. On suppose dans cette question que $a = 5$. On s'aidera au besoin des 16 petits triominos qu'on disposera sur les grilles ad-hoc pour ses tests au brouillon.

a. Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 6$.

b. Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 9$.

c. On suppose b divisible par 3, $b \geq 6$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $5 \times b$.

6. On suppose que b est divisible par 3 et que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$. Montrer que l'on peut alors paver une grille de taille $(a + 2) \times b$.

7. On suppose que $a \geq 4$, et $b \geq 4$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ si, et seulement si, ab est divisible par 3. En déduire les grilles carrées que l'on peut paver.

Olympiades de mathématiques

session 2026

Deuxième partie – Durée 2 heures

Académie de Toulouse et Agence pour l'Enseignement Français à l'étranger

zone ibérique

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

- Seules les annexes éventuelles doivent être insérées dans les copies.
- Ne pas insérer les énoncés dans les copies qui doivent être rendus séparément.

La deuxième partie de l'épreuve se déroule ainsi :

- Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.
- Tous les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Chaque candidat traite ainsi deux exercices académiques. Selon son profil, l'exercice 1 et l'exercice 2 ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Sauf mention contraire, les réponses devront être justifiées.

Exercice 1

À traiter par TOUS les candidats

Maya ou Pamaya ?

D'après une idée du mathématicien indien Kaprekar, les nombres pamayas sont aussi appelés auto-nombres ou nombres colombiens.

On considère les deux fonctions suivantes :

- S qui à tout entier naturel associe la somme des chiffres de son écriture décimale.

  Par exemple $\mathrm{S}(2026) = 2 + 0 + 2 + 6 = 10$.

- D qui à tout entier naturel n associe $n + \mathrm{S}(n)$ c'est à dire le nombre n lui-même augmenté de la somme des chiffres de son écriture décimale.

  Par exemple $\mathrm{D}(2026) = 2026 + 10 = 2036$.

On dit que 2026 a pour image 2036 par la fonction D, et on dit aussi que 2026 est un antécédent de 2036 par D.

Partie A : Étude de la fonction D.

Question 1. Calculer $\mathrm{S}(3)$, $\mathrm{D}(3)$, $\mathrm{S}(10)$, $\mathrm{D}(10)$, $\mathrm{S}(15)$ et $\mathrm{D}(15)$.

Question 2. Justifier que l'affirmation suivante est vraie.

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, alors $\mathrm{D}(n) > n$.

Question 3. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Si n et m sont deux entiers naturels tels que $n < m$ alors $\mathrm{D}(n) < \mathrm{D}(m)$.

Question 4.

a. Soit n un entier naturel compris entre 0 et 9. Exprimer $\mathrm{D}(n)$ en fonction de n.

On admet sans démonstration que le produit de deux nombres impairs est impair, et que dans les autres cas, le produit de deux nombres entiers est pair.

b. Soit n un entier naturel s'écrivant avec deux chiffres.

On peut l'écrire sous la forme $n = 10a + b$ où a est son chiffre des dizaines $(a \neq 0)$ et b celui des unités. a et b sont donc des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. Par exemple, $42 = 10 \times 4 + 2$.

Justifier que $\mathrm{D}(n)$ et a ont la même parité.

c. Soit n un entier naturel s'écrivant avec trois chiffres.

a, b et c étant les chiffres des centaines, des dizaines et des unités de n avec $a \neq 0$. Ainsi $n = 100a + 10b + c$.

a, b et c sont donc des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9.

Déterminer la parité de $\mathrm{D}(n)$ en fonction de celles de a et de b.

Partie B : Maya ou Pamaya

- On dit qu'un nombre est **maya** lorsqu'il a au moins un antécédent par la fonction D.

  Par exemple 30 est **maya** puisqu'il admet 24 comme antécédent $\mathrm{D}(24) = 30$.
- On dit qu'un nombre est **pamaya** lorsqu'il n'a pas d'antécédent par D.

  7 n'admet aucun antécédent par la fonction D. 7 est donc **pamaya.**

Question 5. Déterminer le plus petit nombre pamaya à deux chiffres.

Question 6. Montrer que 111 est un nombre maya.

Question 7. Justifier que 101 a exactement 2 antécédents par D.

On rappelle que tout entier naturel à deux chiffres n peut s'écrire sous la forme $n = 10a + b$ où a est son chiffre des dizaines $(a \neq 0)$ et b celui des unités.

Question 8.

Le but de cette question est de montrer que 2022 est un nombre pamaya.

On se demande donc s'il existe un entier naturel n tel que $\mathrm{D}(n) = 2022$.

a. Montrer que si $n \leq 1989$ alors $S(n) \leq 28$.

b. En déduire que si $n \leq 1989$ alors $D(n) \neq 2022$.

Soit $n = 1000a + 100b + 10c + d$, où a, b, c et d sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. $a \neq 0$

On a alors $\mathrm{D}(n) = 1001a + 101b + 11c + 2d$ et on admet que $\mathrm{D}(n)$ à la même parité que la somme $a + b + c$.

c. En déduire la parité de $\mathrm{D}(n)$ lorsque $1990 \leq n \leq 1999$.

d. Montrer que si $2000 \leq n \leq 2009$ alors $\mathrm{D}(n) \leq 2020$.

e. Que dire de la parité de $\mathrm{D}(n)$ lorsque $2010 \leq n \leq 2019$?

f. Justifier que 2022 est un nombre pamaya.

Partie C : Des années pamayas

On admet sans démonstration que la différence entre 2 nombres pamayas consécutifs et inférieurs à 10000 est égale à 2, ou à 11 ou à 15.

Question 9.

Des chercheurs ont poursuivi les travaux du mathématiciens Kaprekar et organisent des congrès pour échanger leurs idées. Ils décident de choisir des années dont le millésime* est un nombre pamaya.

Sachant que nous sommes en 2026, quelle est la prochaine année possible pour organiser ce congrès ?

Question 10.

Le précédent congrès avait eu lieu avant 2010, plus exactement la dernière année avant 2010 dont le millésime est un nombre pamaya. En quelle année a-t-il eu lieu ?

* le millésime d'une année est le nombre formé par les 4 chiffres de l'année. Ainsi, le millésime de l'année actuelle est 2026.

Exercice 2

À traiter uniquement par les candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques de la voie générale

L'escalier du diable

On rappelle les définitions et propriétés suivantes :

- **Définition :**
  Soit q un nombre réel fixé.
  On appelle suite géométrique de raison q une suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et pour laquelle, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$
- **Propriété 1 :**
  Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = q^n u_0$
- **Propriété 2 :**
  Pour $q \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^n u_0 = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- **On admet que :**
  Pour tout nombre réel q vérifiant $0 < q < 1$, lorsque n devient très grand q^n est proche de 0.
- **Définition :** On dit que deux intervalles I et J sont disjoints lorsque leur intersection est vide, c'est à dire $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset$.
  Ainsi $[6; 12]$ et $[13; 14]$ sont disjoints ; alors que $[6; 12]$ et $[11; 14]$ ne le sont pas.

Partie A

On considère les fonctions f définies sur l'intervalle $[0; 1]$, pour lesquelles on sait que :

$$\text{Pour tout } x \in [0; 1] \; f(x) = 1 - f(1-x) \qquad \text{(P1)}$$

Question 1. On s'intéresse à une fonction f_1 vérifiant la propriété (P1) et dont on donne ci-dessous un tableau de valeurs.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
$f_1(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$		$\frac{6}{10}$		

Compléter le tableau de valeurs en annexe. Écrire les calculs effectués.

Question 2. Cas d'une fonction affine par morceaux.

Dans cette question, on considère la fonction f_2 vérifiant (P1) et telle que :

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x \text{ si } x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

a. Justifier $f_2(0{,}6) = \frac{1}{2}$ et que $f_2(0{,}8) = 0{,}7$.

b. Soit $x \in [\frac{1}{2};\frac{2}{3}]$, déterminer $f_2(x)$.

c. Soit maintenant $x \in [\frac{2}{3};1]$, déterminer une expression de $f_2(x)$.

d. Tracer la représentation graphique de la fonction f_2.

Question 3. Généralisation.

Soit une fonction f_3 vérifiant la propriété (P1), montrer que : $f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Partie B

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$, pour laquelle on sait que :

- Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) = 1 - f(1-x)$ **(P1)**
- f est croissante sur $[0;1]$ **(P2)**
  c'est-à-dire que, si $0 \leq x \leq y \leq 1$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(y) \leq f(1)$.
- Pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, $f(\frac{x}{3}) = \frac{f(x)}{2}$ **(P3)**

On rappelle que l'on a démontré dans la partie A qu'une telle fonction vérifie en particulier $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Question 4. En utilisant **(P3)**, calculer $f(0)$. En déduire $f(1)$.

Question 5. Calculer $f(\frac{1}{3})$ puis $f(\frac{2}{3})$.

Question 6. Montrer que f est constante sur l'intervalle $[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$.

Question 7.

En utilisant le repère donné en annexe, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$.

Ce tracé sera complété au fur et à mesure lors de prochaines questions.

Question 8.

a. Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{9};\frac{2}{9}]$, $f(x) = \frac{1}{4}$.

b. Que peut-on dire de f sur $[\frac{7}{9};\frac{8}{9}]$?

c. Compléter la figure en annexe.

Question 9.

Eulalie se dit : Cette représentation me fait penser à un escalier avec ses trois marches dont la longueur totale est égale à $\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$.

Elle se demande si la fonction a un comportement similaire sur les parties restantes de l'intervalle $[0\,;1]$.

On note $R_2 = 1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ la longueur totale de ces intervalles sur laquelle f reste encore à étudier.

Intriguée, Eulalie pousse plus loin son exploration de la fonction f.

a. Quels sont les quatre intervalles de longueur $\frac{1}{27}$, disjoints des précédents, sur lesquels f est constante sur chacun d'eux ? Expliquer le raisonnement.

b. Compléter le graphique.

c. Déterminer la longueur totale R_3 des intervalles sur lesquels f reste maintenant à étudier.

d. Eulalie poursuit son étude en s'appuyant sur des intervalles de longueur $\frac{1}{3^4}$ puis de longueur $\frac{1}{3^5}$, que valent R_4 et R_5 ?

Question 10.

a. Généralisation : Exprimer R_n en fonction de n.

b. Que devient R_n quand n devient très grand ?

c. Quelle est, selon vous, la somme des longueurs de toutes les marches ?

Partie C : Calcul de quelques images

Question 11. Déterminer $f(x)$ pour $x\in[\frac{61}{243};\frac{62}{243}]$.

Question 12. Que vaut $f(\frac{2026}{2187})$?

Exercice 3

À traiter uniquement par les candidats de la voie générale ne suivant pas l'EDS mathématiques et par tous les candidats de la voie technologique

La séquence interdite

Alex et Billy jouent au jeu la séquence interdite.

- On commence par tirer au hasard un nombre entier N supérieur ou égal à 3.
- Puis à tour de rôle, en commençant toujours par Alex, Alex et Billy choisissent un nombre entier entre 1 et N, 1 et N compris, en respectant les deux règles suivantes :
  - **Règle n°1 : Un joueur ne peut pas choisir un nombre entier qui a déjà été choisi par lui-même ou par <u>son adversaire</u>.**

    Par exemple, si Alex a choisi le nombre **entier** 2, ni Alex, ni Billy ne pourront plus choisir le nombre 2 dans cette partie.
  - **Règle n°2 : Un joueur ne peut pas choisir le nombre entier qui suit ou qui précède un nombre entier déjà choisi par lui-même lors de cette partie.**

    Par exemple, si Billy a choisi le nombre entier 6, Billy ne pourra plus choisir les nombres 5 et 7 dans cette partie.
- La partie s'arrête si :
  - Tous les nombres entiers compris entre 1 et N ont été choisis. Dans ce cas, la partie est déclarée nulle.
  - Des nombres entiers compris entre 1 et N n'ont pas été choisis mais le joueur dont c'est le tour de jouer ne peut pas les choisir à cause de la règle n°2. Ce joueur a alors perdu la partie.

<u>Exemple :</u> Voici le déroulement d'une partie où N=5.
Alex commence par choisir 2, puis Billy choisit 4, puis Alex choisit 5, puis Billy choisit 1.

Dans ce cas, Alex ne peut plus jouer en raison de la règle n°2. Donc Billy a gagné la partie.

Dans les questions suivantes, pour décrire une partie, on utilisera la présentation et les notations ci-dessous :

Partie	**A2**	**B4**	**A5**	**B1**

Question 1. Quelques parties

a. Dans cette question, N=6.

On propose ci-dessous le déroulement de trois parties du jeu.

Partie 1	**A3**	**B2**	**A5**	**B4**	**A1**	**B6**

Partie 2	**A3**	**B1**	**A6**	**B5**

Partie 3	**A4**	**B1**	**A2**	**B6**	**A5**	**B3**

- Ces trois parties respectent-elles les règles du jeu ?
- Si non, pour quelle(s) raison(s) ?
- Si oui, dire si la partie est nulle ou donner le nom du ou de la gagnante ?

b. Donner un exemple de partie nulle dans le cas où $N = 11$.

c. Soit N un entier quelconque supérieur ou égal à 3.

Donner un exemple de partie nulle dans ce cas général.

Question 2.

Dans le cas où N=3, montrer que Billy peut faire en sorte de gagner quel que soit le nombre entier choisi au départ par Alex.

Question 3. Dans cette question, N=4.

a. Proposer un exemple de partie où Billy gagne.

b. Montrer que si Alex commence par choisir le nombre 1 et quel que soit le nombre choisi ensuite par Billy, Alex peut obtenir une partie nulle ou gagner.

c. Montrer que si Alex commence par choisir le nombre 2, Billy peut toujours faire en sorte de gagner.

d. Expliquer pourquoi il suffit d'examiner les situations où Alex commence par choisir le nombre 1 ou le nombre 2 pour étudier toutes les situations possibles.

Question 4. Dans cette question, N=5.

a. Alex commence par choisir 1. Expliquer pourquoi Billy, en jouant 5, peut toujours faire en sorte de gagner.

b. En déduire que Billy peut gagner quel que soit le nombre entier choisi au départ par Alex.

Question 5. Dans cette question, N=6.

a. Alex commence par choisir 1, puis Billy choisit 3. Montrer qu'Alex peut toujours faire en sorte de gagner.

b. Alex commence par choisir 3. Montrer que Billy peut toujours faire en sorte d'obtenir une partie nulle.

Question 6. Dans cette question, N=7.

Alex commence par choisir 1. Montrer que, en choisissant 7, Billy peut toujours faire en sorte de gagner.

Question 7.

On suppose que N=$2p$-1 où p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Billy dit à Alex : J'ai une stratégie pour gagner. Si tu choisis le nombre k, je te réponds en choisissant le nombre $2p - k$.

Que pensez-vous de la stratégie de Billy ?

ANNEXE - Exercice 2 à détacher et à rendre avec la copie

Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale.

Nom Prénom :

Partie A : question 1

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
$f_1(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$		$\frac{6}{10}$		

Partie B : question 7