Performances des systèmes asservis

1. La commande des systèmes

1.1. Exemple : régulateur de vitesse pour véhicules automobiles

Le régulateur de vitesse est un système permettant de stabiliser l'allure de son véhicule à une vitesse donnée. Celle-ci est maintenue quel que soit le profil de la route (montée, descente, virage...). Le conducteur n'a donc plus besoin de maintenir une pression sur la pédale d'accélérateur avec son pied droit. Il économise également du carburant en évitant les à coups.

Par l'intermédiaire de boutons ou d'une palette situés au niveau du volant, le conducteur sélectionne l'allure à laquelle il veut rouler. Le régulateur de vitesse via des capteurs et une unité de contrôle, gère le couple moteur afin de maintenir constamment la vitesse demandée.

1.1.1. Fonctionnement sans régulation automatique

Sans régulation automatique, c'est le conducteur qui gère la vitesse du véhicule comme illustré figure 1.

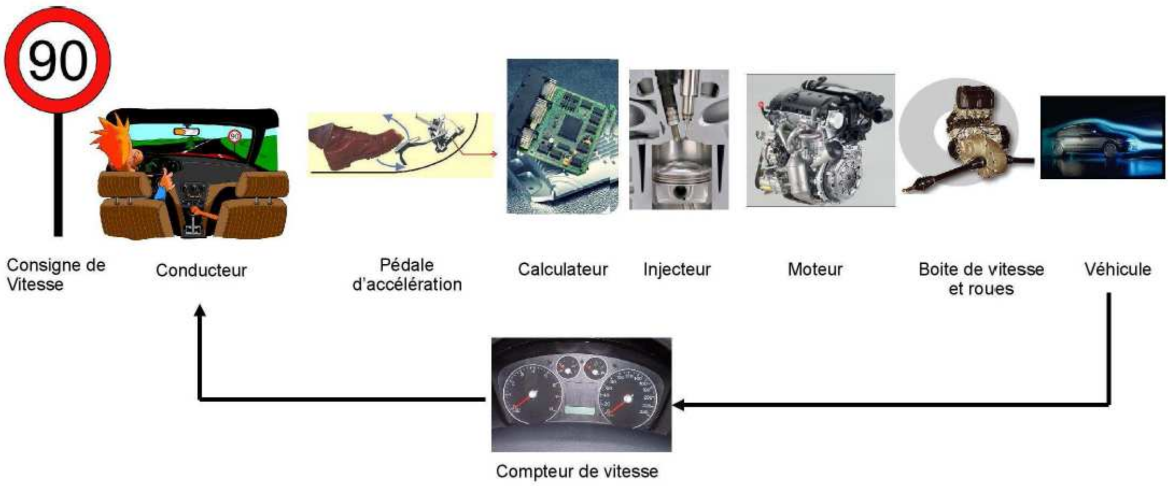


Figure 1 : principe de fonctionnement sans régulation automatique

Principe de fonctionnement

- En fonction de l'état de la circulation, de la limitation et de l'information de vitesse fournie par le compteur de vitesse, le conducteur par une action sur la pédale d'accélération maintient la vitesse de son véhicule ;
- L'action sur la pédale d'accélération induit une rotation d'un angle compris entre 0° et 28° environ ;
- L'information d'angle est transmise à un calculateur qui détermine la quantité de mélange carburant-air à fournir au moteur via les injecteurs. La quantité de mélange carburant-air se traduit par un temps d'ouverture T compris entre 0 et 5 ms de chaque injecteur au cours d'un cycle de combustion ;
- L'injecteur libère le mélange carburant-air dans la chambre de combustion du moteur. Chaque injecteur s'ouvre durant la période T (s), ce qui induit un débit moyen Q ($l.s^{-1}$) de carburant admis dans chaque cylindre ;
- Durant le temps T, le carburant sous pression (de l'ordre de 100 bars pour les moteurs à essence) est pulvérisé dans la chambre de combustion du moteur à un débit de 4 800 $mm^3.s^{-1}$. Le moteur 4 temps de voiture « classique » comporte 4 cylindres et une combustion est réalisée tous les deux tours de moteur. L'effort disponible en sortie est une fonction croissante du débit de carburant ;
- La boite de vitesse diminue la vitesse de rotation du moteur avant de transmettre le mouvement aux niveaux des roues motrices. Ceci à pour conséquence d'augmenter le couple moteur dans la même proportion. Les roues exercent un effort moteur F en fonction du couple moteur C.

La force de poussée *F* fournit par le moteur permet au véhicule d’avancer. En fonction du relief de la route (montées, descentes, virages) et de la résistance aérodynamique, le véhicule subit des forces extérieures perturbatrices.
Afin de simuler le comportement du véhicule, il est nécessaire de renseigner chaque bloc du système.

1.1.2. Fonctionnement avec régulation automatique

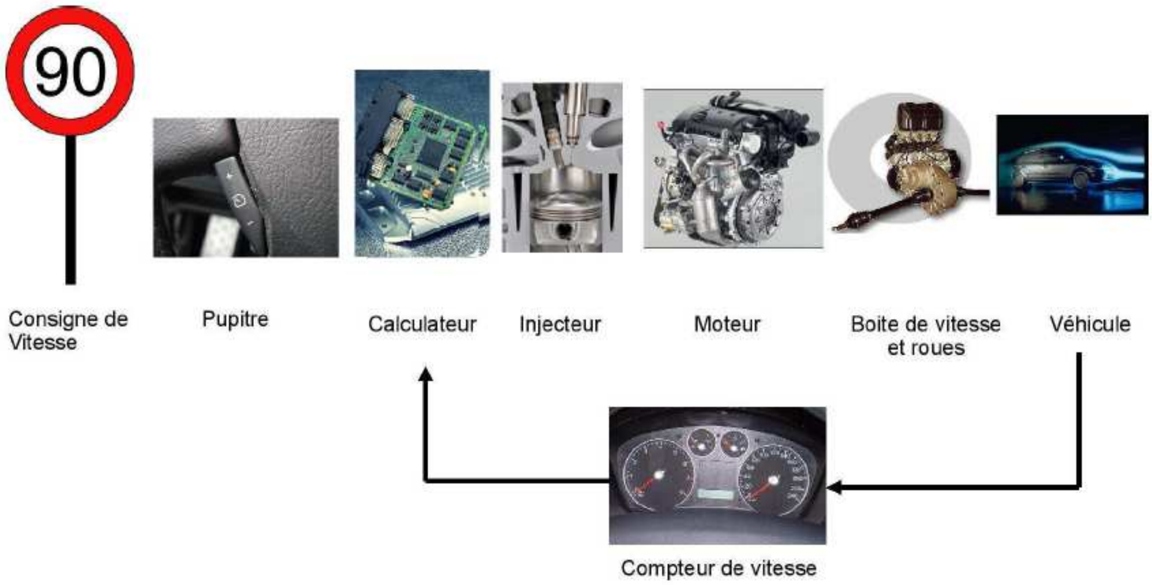


Figure 2 : principe de fonctionnement avec régulation automatique

Principe de fonctionnement

- Le conducteur entre une consigne de vitesse par l’intermédiaire d’un pupitre situé au niveau du volant ;
- Le calculateur récupère cette consigne ainsi que la vitesse réelle du véhicule provenant d’un capteur de vitesse. Les deux informations sont comparées puis traitées par le calculateur afin d’établir un temps d’ouverture de chaque injecteur.

Après avoir identifié le comportement de chaque bloc, il est possible de simuler le comportement du système, en imposant différentes vitesses de consigne, des perturbations afin de tester différents dispositifs de commande.

1.2. Caractéristiques d’un système de commande

1.2.1. Commande en chaîne directe

Un système fonctionne en *chaîne directe* s’il n’y a pas de contrôle sur la manière dont la commande a été exécutée (figure 3).

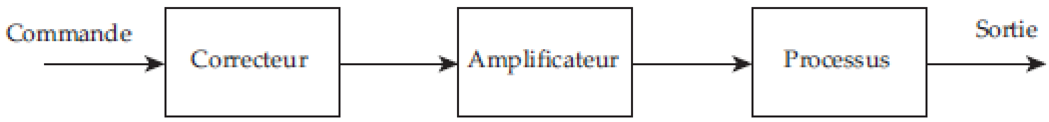


Figure 3 : commande en chaîne directe

Un véhicule sans régulateur fonctionne en boucle ouverte. Le conducteur agit sur la pédale de l’accélérateur pour faire varier sa vitesse mais le véhicule n’effectue aucun contrôle de la vitesse atteinte.
En cas de perturbations, vent de face ou arrière, montée ou descente, la vitesse du véhicule va varier même si le conducteur maintien la pédale de l’accélérateur dans une position fixe.

1.2.2. Perturbation

Une perturbation est une grandeur d'entrée agissant sur le système (figure 4).

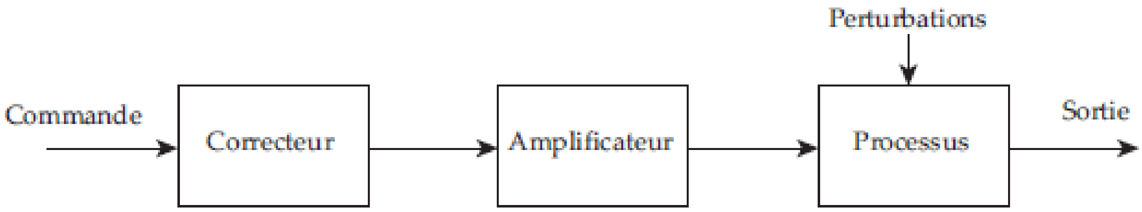


Figure 4 : commande en chaîne directe avec perturbation

Le vent ou la pente sur une route représentent des perturbations pour un véhicule. Pour conserver une vitesse constante, il faut adapter la puissance du moteur en fonction de l'écart avec la vitesse de consigne. Pour cela, il faut réaliser un asservissement.

1.2.3. Asservissement du système de commande en boucle fermée

Un système fonctionne en « boucle fermée » si une mesure de la sortie est réalisée puis comparer à la consigne d'entrée afin d'agir sur le système en conséquence. (figure 5).

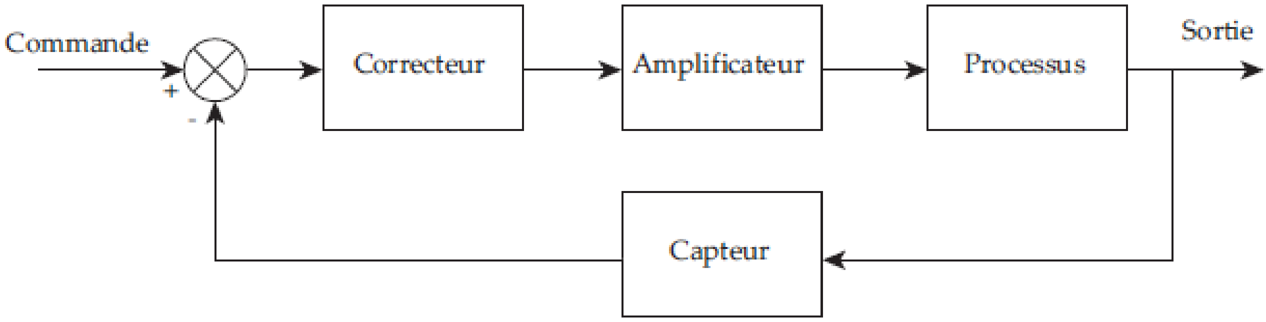


Figure 5 : commande en boucle fermée

L'asservissement du système de commande consiste donc à mesurer la sortie et utiliser cette information pour corriger la grandeur d'entrée du processus.

1.2.4. Systèmes asservis régulateurs et suiveurs

Il existe des systèmes *régulateurs* (figure 6) où la consigne reste constante et des systèmes *suiveurs* où la consigne évolue au cours du temps (figure 7).

Figure 6 : château d'eau

Figure 7 : lanceur Ariane 6

2. Performances d’un système asservi

Le comportement d’un système asservi est évalué suivant trois critères de performance :

- Stabilité : la réponse du système asservi converge-t-elle pour une entrée constante ? Certains systèmes peuvent être instables et leurs réponses divergent ou oscillent sans jamais se stabiliser ;
- Précision : la réponse du système asservi atteint-elle la valeur de consigne en l’absence d’une perturbation ? : la réponse du système asservi atteint-elle la valeur de consigne en présence d’une perturbation ?
- Rapidité : combien de temps faut-il au système asservi pour se stabiliser ?

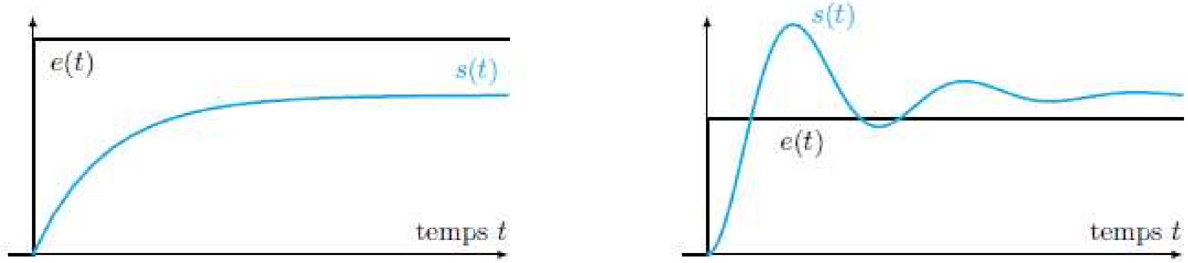
La réponse d’un système asservi dépend du signal d’entrée et les performances sont généralement évaluées à partir d’une entrée constante.

2.1 Stabilité

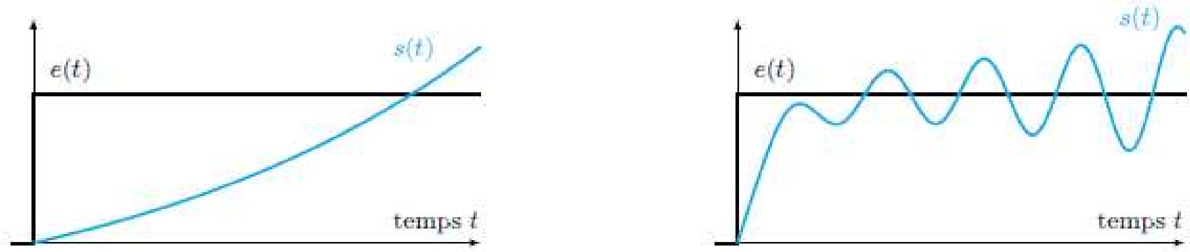
La stabilité est la capacité du système asservi à converger vers une valeur constante lorsque $t \to \infty$

Exemples :

Systèmes stables



Systèmes instables



La réponse d’un système peut présenter des dépassements. Dans ce cas, la réponse dépasse la valeur à convergence avant de converger.
Dans certaines applications comme la découpe de matériaux au laser, les dépassements sont à proscrire car les dimensions ne sont plus respectées même si l’asservissement est précis.
Afin de caractériser la stabilité, les critères de *taux de dépassement* et *d’amortissement* sont à prendre en compte.

Taux de dépassement relatif

Le taux de dépassement relatif exprimé en pourcentage caractérise l’amplitude maximale de la première oscillation (figure 8) et est défini par :

$$D_1(\%) = 100 \times \left|\frac{s(t_1) - s_\infty}{s_\infty}\right|$$

$s(t_1)$: amplitude du premier dépassement qui est maximal pour un système stable ;
s_∞ : valeur à convergence de la réponse.

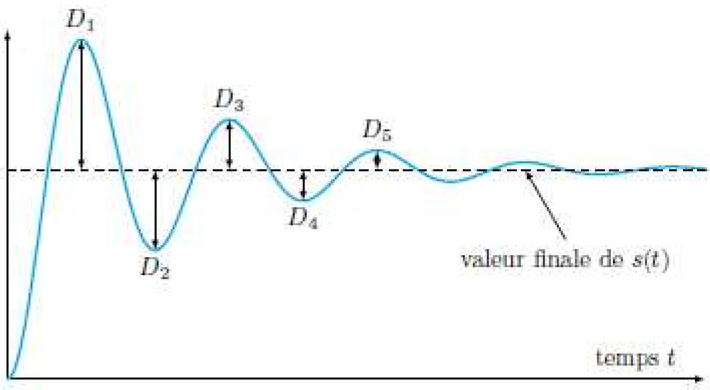


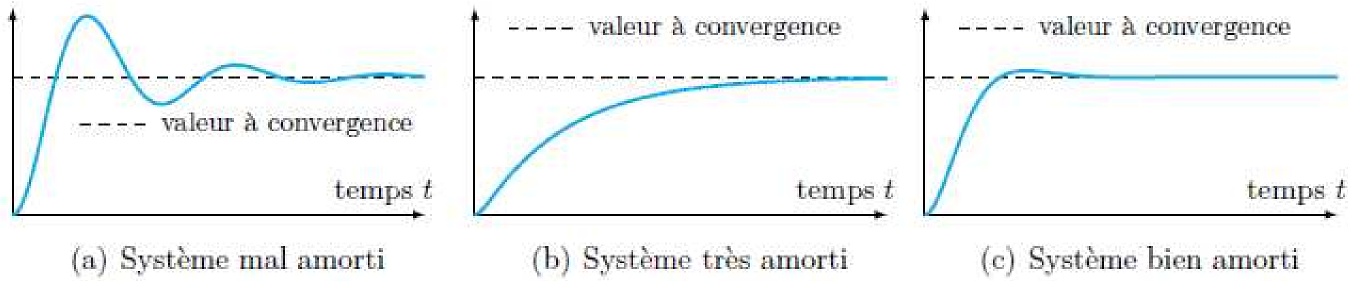
Figure 8 : numérotation des dépassements

Remarque : généralement la quantification du taux de dépassement relatif s'effectue sur $D_1(\%)$ car il est le plus important pour un système stable.

Amortissement

L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie. Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti.

Exemples :



2.2 Précision

La précision d'un système asservi est caractérisée par **l'erreur en régime permanent** indépendamment des éventuelles perturbations. L'erreur en régime permanent $\mu(t)$ est définie par l'écart entre la valeur de consigne de la grandeur d'entrée et la valeur réellement atteinte par la grandeur de sortie : $\mu(t) = e(t) - s(t)$

Remarque : l'erreur $\mu(t)$ peut être déterminée seulement si les grandeurs d'entrée et de sortie possèdent les mêmes unités.

Erreur statique μ_S pour une entrée constante

L'erreur statique μ_S (figure 9) est la différence entre la consigne constante E_0 et la réponse $s(t)$ en régime permanent et se calcule de la façon suivante :

$$\mu_S = \lim_{t \to \infty} E_0 - s(t)$$

Remarque : un système est précis si l'erreur statique est nulle.

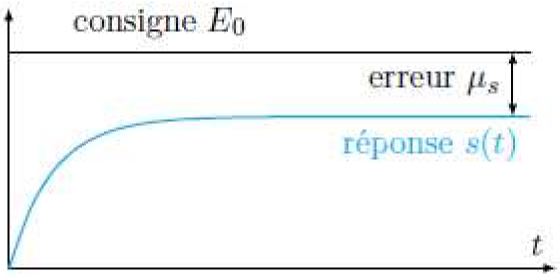


Figure 9 : illustration de l'erreur statique

Sensibilité aux perturbations

Un système est sensible aux perturbations s'il ne converge pas vers la même valeur en présence d'une perturbation extérieure (figure 10).

Remarque : la sensibilité aux perturbations est définie pour des valeurs à convergence c'est-à-dire en régime permanent.

Insensible à la perturbation   Sensible à la perturbation

Figure 10 : influence d'une perturbation

2.3 Rapidité

La rapidité d'un système asservi est la capacité à atteindre rapidement la valeur à convergence également appelée valeur finale.

Dans la majorité des cas, la valeur finale est atteinte de manière asymptotique voire oscillante, de ce fait, le critère d'évaluation de la rapidité d'un système est le temps de réponse à 5%.

Le temps de réponse à 5% noté $t_{r5\%}$ correspond au temps mis par le système pour atteindre sans en sortir l'intervalle à $\pm 5\%$ de la valeur finale (figure 11).

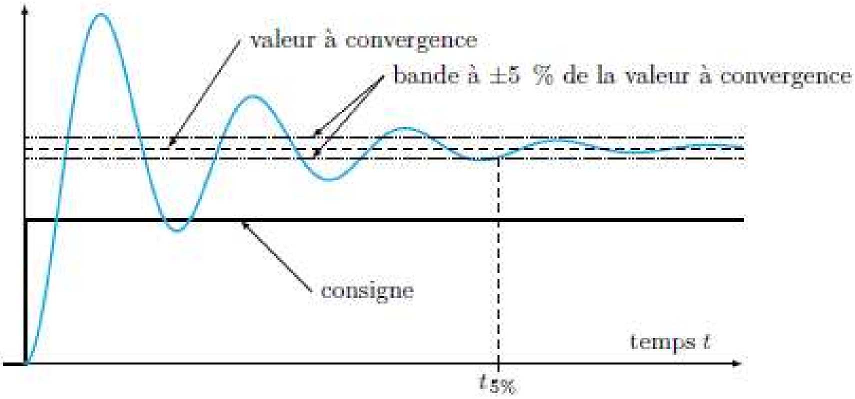


Figure 11 : temps de réponse à 5%

3. Représentation des chaînes fonctionnelles

Il est important de pouvoir simuler le comportement d'un système afin de prévoir ses performances. Il est donc nécessaire d'associer un modèle à chaque constituant d'un système et de traiter simultanément l'ensemble de ces modèles. C'est le rôle du schéma-blocs acausal qui permet d'avoir une vision graphique du comportement du système décrit par des équations.

Schéma-blocs acausal

Les schémas-blocs dits acausaux ne présupposent pas à l'avance des grandeurs d'entrées (causes) et de sorties (effets) à choisir pour un composant.

Le schéma-blocs acausal est très proche de l'architecture du système (chaînes d'information et de puissance instantanée). Il permet de modéliser le comportement d'un système sans avoir à écrire les équations qui caractérisent le comportement de chaque bloc. En revanche, le schéma-blocs acausal nécessite de comprendre les modèles des constituants afin de pouvoir saisir les paramètres associés à chaque bloc.

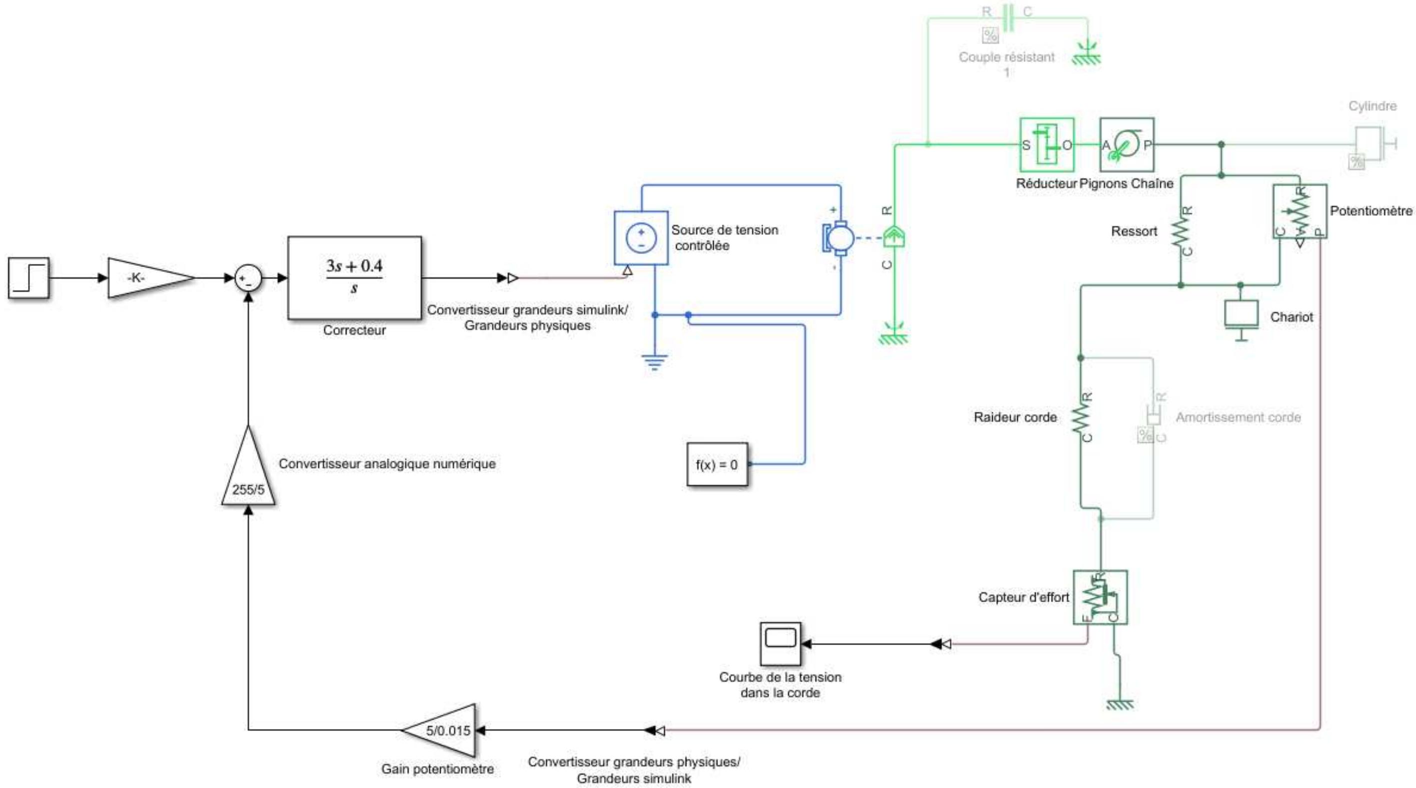


Figure 12 : modélisation par schéma-blocs acausal de la cordeuse de raquette de tennis.

Les traits entre les blocs matérialisent soit des fils électriques, des pièces mécaniques, des flux…

4. Modélisation des systèmes asservis

L'objectif principal de la modélisation est de prévoir le comportement d'un système.
Pour cela, il est nécessaire de :

- proposer une modélisation des variables d'entrée (consignes, perturbations) ;
- modéliser le système global ;
- simuler le comportement du système ;
- analyser les résultats de la simulation.

Pour analyser correctement la réponse d'un système simulé, il faut :

- comparer les résultats obtenus par simulation à des résultats expérimentaux ;
- valider les performances obtenues par rapport aux critères du cahier des charges.

La démarche d'analyse est généralement itérative. À partir des résultats obtenus sur un premier modèle, celui-ci est corrigé ou amélioré de manière à être exploitables après plusieurs itérations.

4.1 Modélisation des entrées

Pour étudier le comportement dynamique d'un système, Il est souvent plus pratique de le soumettre à des signaux d'entrée du type échelon unité ou rampe élémentaire (figure 13) et d'observer sa sortie.

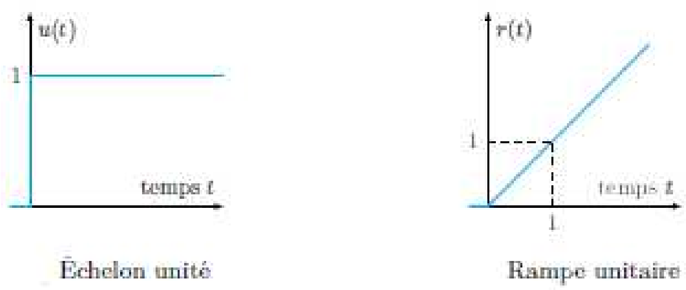


Figure 13 : signaux d'entrée

4.1.1 Fonction échelon unité *u(t)*

La fonction échelon unité $u(t)$: si $t < 0, u(t) = 0$ et si $t \geq 0, u(t) = 1$.

Cette fonction modélise un signal qui passe de la valeur 0 à la valeur 1 très rapidement et qui reste ensuite constant égal à 1.

4.1.2 Fonction rampe unitaire *r(t)*

La fonction rampe unitaire $r(t)$: si $t < 0, r(t) = 0$ et si $t \geq 0, r(t) = t$.
La fonction rampe peut s'exprimer à l'aide de la fonction échelon unitaire :

$$r(t) = t.u(t)$$

Cette fonction modélise par exemple, un déplacement imposé à vitesse constante.

4.2 Système modélisable par un gain pur

Plusieurs constituants de systèmes peuvent être modélisés par un gain pur (constante), c'est à dire une relation de proportionnalité entre l'entrée et la sortie qui s'exprime sous la forme :

$$s(t) = K.e(t)$$

La constante de proportionnalité K est alors appelée le gain du système.

Exemples de constituants modélisables par un gain pur :

- Les transmetteurs (réducteur à roue et vis sans fin, à engrenages, système vis-écrou. . .) ;
- Les pré-actionneurs (variateur…) ;
- Les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique. . .).

4.3 Système modélisable par un intégrateur

Lors de la modélisation des systèmes mécaniques, il est fréquent de devoir passer d'une vitesse *v*(*t*) à une position *x*(*t*) (ou d'une accélération *a*(*t*) à une vitesse *v*(*t*)). La relation alors utilisée est :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

La position $x(t)$ est donc donnée par la relation : $x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau$

La figure 14 illustre la réponse temporelle à une entrée en échelon et en rampe. En supposant que les conditions initiales soient nulles, quand la vitesse est constante, la position est une droite et quand la vitesse est une droite, la position est une parabole.

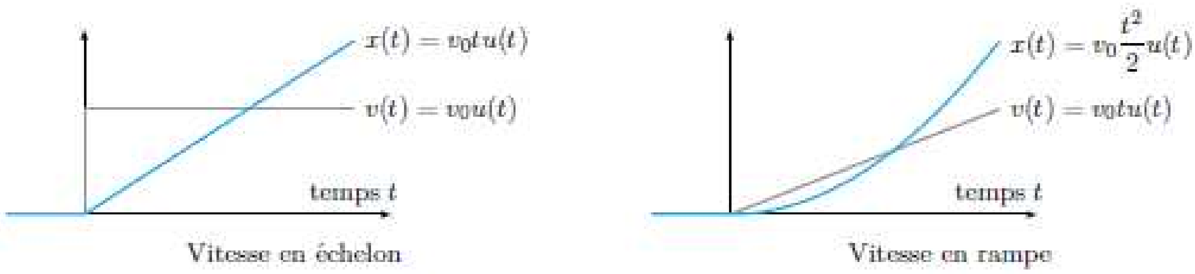


Figure 14 : réponse temporelle de la position pour une entrée en vitesse en échelon et en rampe

Exemple de constituant modélisable par un intégrateur :

- Une bobine, car la relation entre le courant et la tension s'écrit :
$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$
L : inductance de la bobine ;
- Un condensateur électrique, car la relation entre la tension et le courant s'écrit :
$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$
C : capacité du condensateur.

4.4 Système du premier ordre

Ce modèle du premier ordre est régulièrement rencontré car il caractérise le comportement d'un certain nombre de système.

4.4.1 Équation différentielle

Un système du premier ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est régi par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

- K le gain statique du système (unité : $[s]/[e]$)
- τ la constante de temps du système (unité : seconde)

4.4.2 Réponse indicielle (à un échelon $e_0.u(t)$)

La réponse temporelle $s(t)$ à une entrée en échelon d'amplitude e_0 d'un système du premier ordre s'écrit :

$$s(t) = K.e_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)$$

Propriétés (figure 15)

- La valeur finale (valeur asymptotique) tend vers $K.e_0$;
- Pour $t = \tau$, la réponse atteint 63% de sa valeur finale :
$$s(\tau) = K.e_0(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,K.e_0$$
- Pour $t = 3\tau$, la réponse atteint 95% de sa valeur finale :
$$s(\tau) = K.e_0(1 - e^{-3}) = 0{,}95\,K.e_0 \text{ , donc } t_{r5\%} = 3\tau$$
- La pente de la tangente à l'origine est non nulle et vaut : $s'(0) = \frac{K.e_0}{\tau}$;
- La réponse ne présente pas d'oscillation, $s(t)$ est strictement croissante ;
- Plus la constante de temps τ est élevée, plus le système est lent.

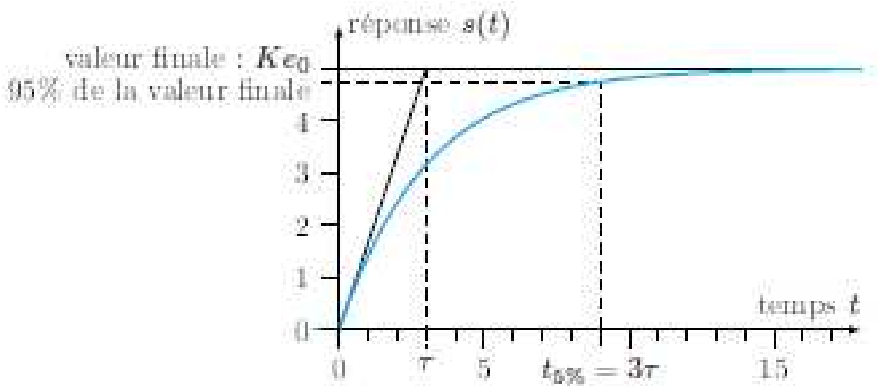


Figure 15 : réponse temporelle d'un système du premier ordre soumis à un échelon

4.4.3 Identification du modèle

L'identification de modèle consiste à proposer un modèle théorique à partir de la réponse d'un système à une entrée type, mesurée expérimentalement. Le modèle obtenu est appelé *modèle de comportement* puisqu'il traduit le comportement observé en sortie, sans se préoccuper du fonctionnement interne.

L'entrée type la plus couramment utilisée est l'échelon pour l'identification du modèle.

Si la réponse mesurée présente les caractéristiques de la réponse indicielle d'un système du 1er ordre (allure à décroissance exponentielle, pente initiale non nulle, pas d'oscillations hors éventuel bruit de mesure et convergence vers une valeur constante), alors il est possible de modéliser le comportement de ce système par une équation différentielle du premier ordre.

Les paramètres caractéristiques K et τ sont identifiés sur la courbe mesurée expérimentalement (figure 16) :

- K par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut Ke_0, sachant que e_0 est connue ;
- τ par trois méthodes suivant la qualité de la courbe :
  - le temps où la courbe atteint 63 % de la valeur finale vaut τ ;
  - le temps où la courbe atteint 95 % de la valeur finale vaut 3τ ;
  - la tangente à l'origine coupe l'asymptote Ke_0 en $t = \tau$. Cette méthode n'est pas conseillée car peu précise.

Figure 16 : identification d'un modèle de comportement du premier ordre

4.5 Système du deuxième ordre

Ce modèle du second ordre est aussi régulièrement rencontré. Il est utilisé pour améliorer les modèles du premier ordre (prise en compte de frottements visqueux par exemple…).

4.5.1 Équation différentielle

Un système du deuxième ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est régi par l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

- K le gain statique du système (unité : $[s]/[e]$) ;
- ω_0 la pulsation propre non amortie (unité : rad·s^{-1}) ;
- ξ le facteur d'amortissement (sans unité).

4.5.2 Réponse indicielle (à un échelon $e_0.u(t)$)

Les réponses temporelles $s(t)$ à une entrée en échelon d'amplitude e_0 d'un système du deuxième ordre sont fonction des valeurs du facteur d'amortissement ξ. Trois cas sont donc possibles :

- Amortissement faible $\xi < 1$;
- Amortissement critique $\xi = 1$;
- Amortissement fort $\xi > 1$.

Amortissement fort $\xi > 1$ - régime apériodique

La réponse temporelle $s(t)$ à une entrée en échelon d'amplitude e_0 d'un système du deuxième ordre fortement amorti ($\xi > 1$) s'écrit :

$$s(t) = Ke_0\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{\omega_0\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}} - \frac{e^{\omega_0\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right)\right]u(t)$$

Propriétés (figure 17)

- La valeur finale (valeur asymptotique) tend vers $K.e_0$;
- La pente de la tangente à l'origine est nulle ;
- Il n'y a pas de dépassement, le système est amorti ;
- La courbe du système est assimilable à un premier ordre ;
- Plus ξ est proche de 1, plus le système est rapide.

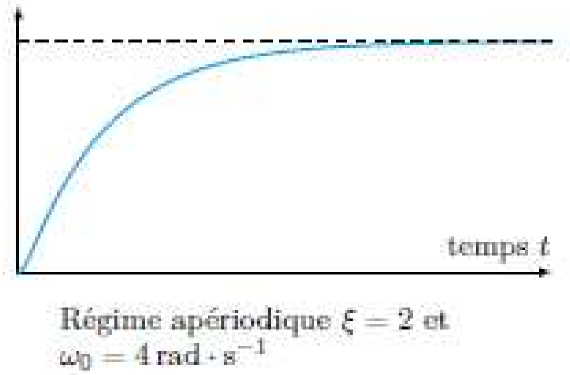


Figure 17 : réponse indicielle d'un système du deuxième ordre d'amortissement fort ($\xi > 1$)

Amortissement critique $\xi = 1$ - régime critique

La réponse temporelle $s(t)$ à une entrée en échelon d'amplitude e_0 d'un système du deuxième ordre d'amortissement critique ($\xi = 1$) s'écrit :

$$s(t) = K e_0 \left(1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}\right) u(t)$$

Propriétés (figure 18)

Les propriétés sont identiques à celle du régime apériodique, le régime critique étant le cas limite quand $\xi \to 1$.

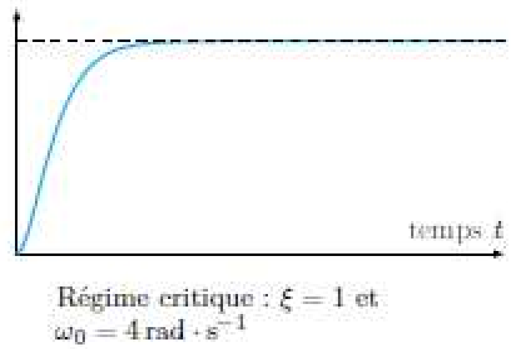


Figure 18 : réponse indicielle d'un système du deuxième ordre d'amortissement critique ($\xi = 1$)

Amortissement faible $\xi < 1$ - régime pseudo-périodique

La réponse temporelle $s(t)$ à une entrée en échelon d'amplitude e_0 d'un système du deuxième ordre d'amortissement faible ($\xi < 1$) s'écrit :

$$s(t) = K e_0 \left[1 - e^{-\omega_0 \xi t}\left(\cos\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right)\right] u(t)$$

Propriétés (figure 19)

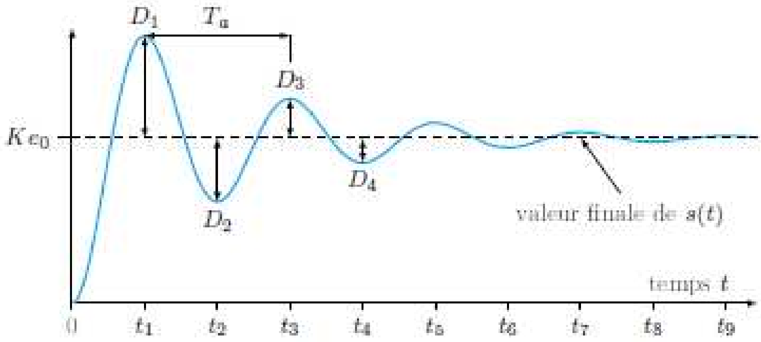


Figure 19 : réponse indicielle d'un système du deuxième ordre d'amortissement faible ($\xi < 1$)

- La réponse est oscillante par la présence des termes en cosinus et sinus. Le système est peu amorti. Pour ce régime pseudo-périodique sont définis :
  - La pseudo-pulsation $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$;
  - La pseudo-période $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$;
- Les dépassements sont caractérisés par :
  - le temps du k^e dépassement : $t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$;
  - le k^e dépassement relatif : $D_k^{\%} = \left|\frac{s(t_k)-s(\infty)}{s(\infty)}\right| = e^{\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$. L'abaque de la figure 20 a été construit à partir de cette formule et les dépassements ne dépendent que de ξ.
- Le temps de réponse à 5% se détermine avec l'abaque adimensionné de la figure 21 ;
- Pour un facteur d'amortissement $\xi = 0{,}69$ le système est le plus rapide avec néanmoins un dépassement $D_1^{\%}$ inférieur à 0,05 ;
- Pour un facteur d'amortissement $\xi = 1$ le système est le plus rapide sans dépassement.

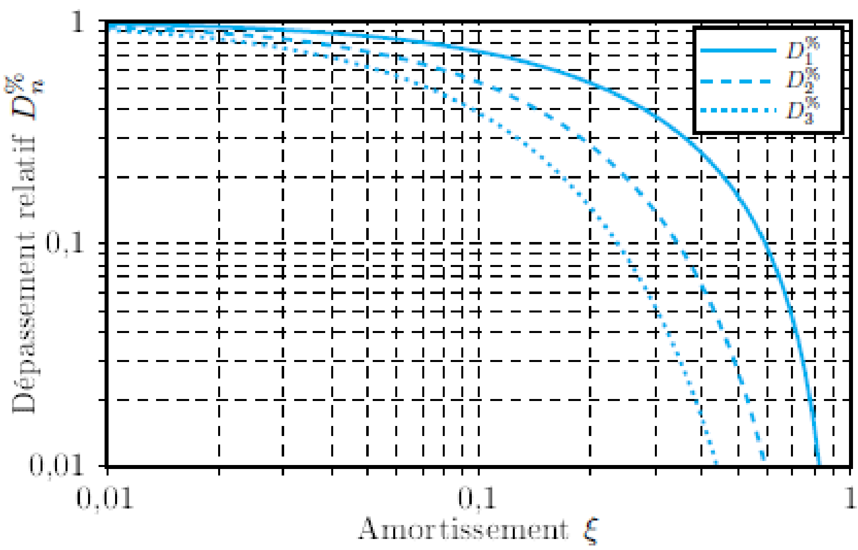


Figure 20 : abaque des dépassements relatifs d'un deuxième ordre en fonction du facteur

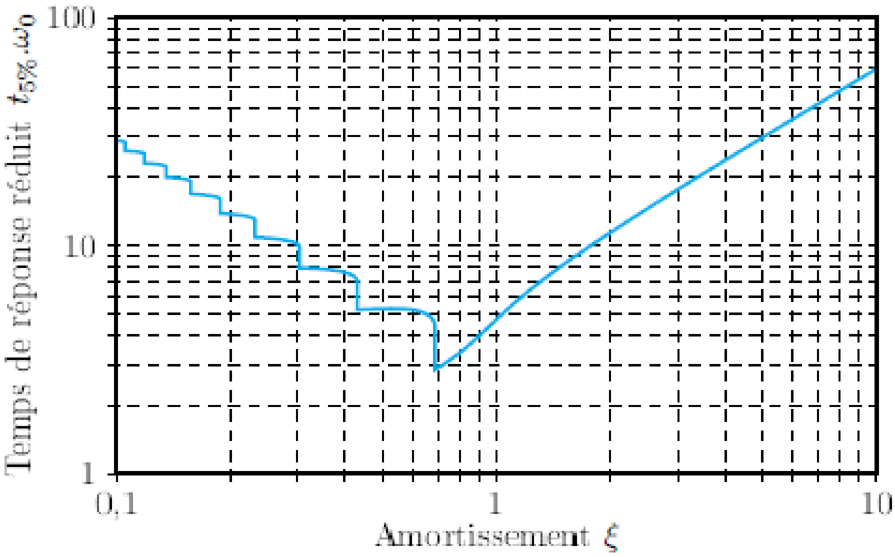


Figure 21 : abaque du temps de réponse réduit $t_{r5\%}.\omega_0$

4.5.3 Identification du modèle

Si la réponse mesurée expérimentalement présente une tangente à l'origine nulle et des dépassements, il convient de modéliser le comportement du système par une équation différentielle du 2^e ordre.

Les paramètres caractéristiques K, ξ et ω_0 sont identifié sur la courbe mesurée :

- K par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut Ke_0, sachant que e_0 est connue ;
- ξ par les dépassements en pourcentage par l'intermédiaire de l'abaque des dépassements figure 20 ou bien par la relation $\xi = \left(1 + \frac{k^2\pi^2}{ln^2 D_k^{\%}}\right)^{-\frac{1}{2}}$
- ω_0 par trois méthodes :
  - par le temps de réponse réduit $t_{r5\%}.\omega_0$ en utilisant l'abaque figure 21 ;
  - par l'instant du premier dépassement ($k = 1$), en utilisant la relation $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1\sqrt{1-\xi^2}}$;
  - par mesure de la pseudo-période en utilisant la relation $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$